

# 基于贝叶斯理论的非接触式桥梁动态称重研究

周 云<sup>1,2</sup> 李自强<sup>2</sup> 胡健鑫<sup>2</sup> 郝官旺<sup>2</sup> 朱正荣<sup>2,3</sup>

(1. 工程结构损伤诊断湖南省重点实验室(湖南大学) 湖南 长沙 410082; 2. 湖南大学 土木工程学院 湖南 长沙 410082;  
3. 长沙市建设工程质量安全监督站 湖南 长沙 410016)

**摘 要:** 传统桥梁动态称重系统(Bridge weigh-in-motion, BWIM)存在硬件成本高昂、安装操作危险等弊端,利用车桥耦合系统中桥梁结构动态响应数据反演车辆荷载信息的非接触式桥梁动态称重(Contactless bridge weigh-in-motion, CBWIM)正在快速发展。文中提出了基于贝叶斯理论的桥梁动态称重方法,已知桥梁影响线后验分布和桥梁动态响应数据,将随机生成的影响线矩阵和桥梁动态响应观测值代入文中提出的基于贝叶斯理论的桥梁动态称重模型,得到轴重参数后验样本,并进行统计分析,以轴重后验分布的最大后验估计值作为轴重的识别结果。通过数值模拟和试验验证了所提方法的有效性与可行性。研究表明:影响线后验分布范围越集中,轴重识别精度越高。车辆总重识别结果受车速影响较小,而轴重识别精度受车速影响明显。

**关键词:** 结构健康监测; 桥梁影响线; 贝叶斯理论; 桥梁动态称重; 车桥耦合  
**中图分类号:** TU4 **文献标识码:** A

## Research on contactless bridge weigh-in-motion based on Bayesian theory

ZHOU Yun<sup>1,2</sup>, LI Ziqiang<sup>2</sup>, HU Jianxin<sup>2</sup>, HAO Guanwang<sup>2</sup>, ZHU Zhengrong<sup>2,3</sup>

(1. Hunan Provincial Key Laboratory of Damage Detection, Hunan University, Changsha 410082, China;  
2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China; 3. Changsha Construction  
Project Quality and Safety Supervision Station, Changsha 410016, China)

**Abstract:** The traditional bridge weighing-in-motion(BWIM) has the disadvantages of high hardware cost and dangerous installation and operation. Contactless bridge weighing-in-motion(CBWIM), which uses the dynamic response data of bridge structure in vehicle-bridge coupling system to invert vehicle load information, has been developed rapidly. In this paper, a bridge dynamic weighing method based on Bayesian theory is proposed. In this method, the posterior distribution of the bridge influence line and the dynamic response data of the bridge are known in advance by contactless identification method, and then substituted into the Bayesian model proposed in this paper to calculate the posterior samples of the axle load parameters. Finally, the maximum posterior estimation of vehicle axle load posterior distribution is regarded as the axle load identification result. Numerical simulation and laboratory test verify the effectiveness and feasibility of the proposed method. The research shows that the more concentrated the posterior distribution range of influence line is, the higher the recognition accuracy of axle load is. The total vehicle weight identification is not affected by vehicle speed, but the axle weight identification accuracy is significantly affected by vehicle speed.

收稿日期: 2022-01-13; 修回日期: 2022-05-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(51878264, 52278306); 湖南省重点研发计划项目(2017SK2220, 2022SK2096); 湖南省交通运输厅科技进步与创新项目(201912)

**Supported by:** National Natural Science Foundation of China(51878264, 52278306); Key Research and Development Program of Hunan Province (2017SK2220, 2022SK2096); Science and Technology Progress and Innovation Project of Department of Transportation of Hunan Province (201912)

作者简介: 周 云(1979—), 男, 教授, 博士, 主要从事结构健康监测及非接触桥梁无损检测方面的研究。E-mail: zhouyun05@hnu.edu.cn

通讯作者: 李自强(1997—), 男, 硕士研究生, 主要从事桥梁结构健康监测方面的研究。E-mail: liziqiang@hnu.edu.cn

**Key words:** structural health monitoring ( SHM) ; bridge influence line; Bayesian theory; bridge weigh-in-motion; vehicle-bridge coupling

## 0 引言

我国桥梁量大面广,截至2020年末全国公路桥梁91.28万座,比上年末增加3.45万座<sup>[1]</sup>。车辆超载导致桥梁结构疲劳损伤累积、使用寿命缩短甚至倒塌等事故频发<sup>[2-3]</sup>。因此,快速精准地识别现役桥梁的安全性能和损伤状态,对于保证桥梁整体安全、预防事故发生有着重要意义。其中如何准确高效地识别桥梁上移动荷载成为了结构健康监测领域亟待解决的关键性问题。

桥梁动态称重系统<sup>[4]</sup>( Bridge weigh-in-motion, BWIM) 结合了交通传感器和公路桥梁梁上应变片,利用权重预测算法实现最小二乘误差的最小化,滤除桥梁响应的动态分量,获得等效静态轴重。DENG等<sup>[5]</sup>通过桥梁响应识别车辆时变轴荷,结果表明车辆轴荷识别精度主要取决于标定影响面的准确性。王宁波<sup>[6]</sup>提出了基于影响线拟合的BWIM优化算法,并通过数值算例对该方法的可行性与适用性进行了验证。O'BRIEN等<sup>[7]</sup>提出了一种概率BWIM算法,通过正态分布解决桥梁影响线中的不确定性,并将最高发生概率相应轴重组合作为最终的轴重识别结果。GONÇALVES等<sup>[8]</sup>改进了概率BWIM算法,在已知桥梁概率影响线的情况下,通过基于梯度的优化程序实现了车辆轴重的高效识别。

然而,BWIM依赖于接触式传感器,成本高昂、操作危险。随着机器视觉技术、大数据的发展,非接触式桥梁动态称重(Contactless bridge weigh-in-motion, CBWIM)逐渐进入了研究人员的视野<sup>[9-11]</sup>。该方法无需任何接触式传感器,通过摄像机获取桥梁响应视频和车辆交通流视频,并预先标定桥梁影响线,识别桥梁上车辆的总重以及轴重。OJIO等<sup>[12]</sup>利用标定后的影响线首次实现了非接触式桥梁动态称重(CBWIM)。ZHOU等<sup>[13]</sup>基于深度学习算法和机器视觉技术,提出了桥梁车辆荷载的非接触式自动辨识方法。FENG等<sup>[14]</sup>通过计算机视觉系统监控车辆轮胎与路面的接触情况,结合车载胎压监控传感器,实现了非接触式车辆动态称重。DAN等<sup>[15]</sup>将机器视觉监测技术和监控摄像机运用于BWIM系统,有效识别了车辆的重量、位置、轨迹等信息。

BWIM属于已知系统信息和系统输出,求解系统输入的第二类反问题。贝叶斯理论将反问题描述为统计推断问题,待识别参数被视作随机变量,反映了观察者对于结构参数真实值的不确定性<sup>[16]</sup>,克服了反问题求解过程中病态解以及不适定性问题。此外,贝叶斯理论具有融合外部数据对待识别信息进行更新的能力,能够提高参数识别精度,得到的后验分布,保证了解的唯一性和存在性。ZONTA等<sup>[17]</sup>基于贝叶斯理论将传感器的数据信息与待识别参数的先验知识相结合,准确地估计了斜拉桥拉索的张力。SUN等<sup>[18]</sup>提出了一种基于时域贝叶斯推理的正则化方法,通过测量移动车辆荷载作用下桥梁结构的加速度、应变以及位移响应数据,实现了未知交通荷载的识别。YOSHIDA等<sup>[19]</sup>提出了一种基于贝叶斯理论的桥梁动态称重方法,对轴重的不确定性进行估计,但该方法需要提前标定桥梁影响线并利用附加信息降低轴重估计的不确定性。

综上所述,通过机器视觉技术测量桥梁结构在车辆荷载作用下的动态响应信号,实现车辆信息反演的CBWIM系统正快速发展,但依然存在需要短暂封闭交通以及识别精度不高的问题。文中提出了基于贝叶斯理论的桥梁动态称重算法,结合桥梁动态响应数据与桥梁影响线参数的分布信息,通过马尔科夫链蒙特卡洛(Markov chain monte carlo, MCMC)方法<sup>[20]</sup>求解贝叶斯模型的边缘后验概率密度函数,实现了车辆轴重后验分布的反演计算。通过车桥耦合数值模拟和实验室车桥缩尺模型试验对所提方法的可行性进行了验证,并对车辆类型与速度对车辆轴重识别精度的影响进行了分析总结,为非接触式桥梁动态称重研究提供了思路。

## 1 基于贝叶斯的桥梁动态称重理论

### 1.1 桥梁动态称重理论

BWIM利用桥梁结构上布置的车轴探测器、应变传感器获取桥梁动态响应和车辆轴距以及速度等信息,结合提前标定的桥梁影响线,通过Moses算法实现实测桥梁响应和基于影响线概念计算桥梁响应误差平方和的最小化,获得车辆轴重<sup>[4]</sup>。Moses算法公式以矩阵的形式表示如式(1):

$$L'W=S \tag{1}$$

式中:  $S$  为响应与影响线的乘积;  $L'$  为包含影响线信息的  $K \times N$  维主对角线对称矩阵,  $K$  为总采样点数;  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}^T$  为车辆轴重。

根据单位影响线叠加法<sup>[21]</sup>, 令  $I = [L_1, L_2, \dots, L_N]$ , 其中  $L_i$  为车辆第  $i$  轴对应的影响线向量。将式 (1) 中的理论响应  $S$  替换为观测响应  $Y$ <sup>[22]</sup>, 则有:

$$Y_{K,1} = I_{K,N} W_{N,1} \tag{2}$$

或

$$\begin{Bmatrix} y_1^M \\ y_2^M \\ \vdots \\ y_K^M \end{Bmatrix}_{K \times 1} = \begin{bmatrix} I_1 & I_{1-C_2} & \cdots & I_{1-C_N} \\ I_2 & I_{2-C_2} & \cdots & I_{2-C_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_K & I_{K-C_2} & \cdots & I_{K-C_N} \end{bmatrix}_{K \times N} \times \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{Bmatrix}_{N \times 1} \tag{3}$$

式中:  $y_K^M$  为桥梁响应观测值;  $C_i$  为车辆第 1 轴至第  $i$  轴间距所对应的采样点数。

式 (3) 建立了桥梁位移响应输出向量、车辆轴重向量、桥梁影响线纵坐标矩阵三者理想条件下的多元线性关系, 可以有效地计算各车轴轴重, 且计算结果与式 (1) 一致。文中基于式 (3) 表示的多元线性关系构建了贝叶斯桥梁动态称重模型。

### 1.2 基于 WinBUGS 的马尔科夫链蒙特卡洛方法实现

马尔科夫链蒙特卡洛 (Markov chain monte carlo, MCMC) 方法<sup>[20]</sup> 基于马尔科夫链<sup>[23]</sup> 进行随机采样, 进而使用蒙特卡洛法<sup>[24]</sup> 进行积分计算。该方法可以解决概率密度函数更新后具有复杂拓扑结构的弊端, 并生成服从平稳分布的样本集作为贝叶斯分析的后验分布, 用于边缘分布以及矩阵计算。

WinBUGS (Bayesian inference using gibbs sampling, BUGS) 是用 MCMC 方法进行贝叶斯统计推断的专用软件包<sup>[25]</sup>, 仅需要指定贝叶斯模型的结构 Model、观测数据 Data 和模型参数的初始值 Initial, 即可从复杂的贝叶斯模型参数后验分布中生成随机样本。具体步骤如下:

第 1 步: 使用 WinBUGS 进行贝叶斯模型指定。

Model 部分由似然函数和参数先验分布共同组成, 似然函数由随机参数分布类型和参数间的函数关系表达。假设响应变量  $Y$  具有  $n$  个观测值  $y_i$ , 将响应变量  $Y$  视为随机参数, 且  $Y \sim \text{Distribution}(\vartheta)$ 。其中,  $\vartheta$  表示随机变量的分布参数向量。该参数向量与输入变量  $X$  以及待识别参数  $\theta$  具有函数关系  $h: \vartheta = h(\theta, X_1, X_2, \dots, X_p)$ 。通过该函数可以写出该模型的似然函数表示如式 (4):

$$f(Y|\theta) = \prod_{i=1}^N f(Y_i|\vartheta_i = h(\theta, X_1^i, X_2^i, \dots, X_p^i)) \tag{4}$$

同时假设待识别参数  $\theta$  的先验分布为  $\theta \sim \text{Distribution}(\gamma)$ , 其中  $\gamma$  表示先验分布中的分布参数。

根据上述条件, Model 部分代码结构表示如下:

```
model{
  Variable Y ~ Distribution( Parameter \vartheta )
  Parameter \vartheta <- [funtion of \theta and X^i ]
  #prior for \theta
  Parameter \theta ~ Distribution( Parametry )
}
```

第 2 步: 设置观测数据 Data 和参数初始值 Initial。

观测数据 Data 包括观测数据  $Y$  和输入数据  $X$ , 常用类型为向量和矩阵。当外部数据为向量时, Data 部分代码结构如下:

```
Data
list( n = number, vector.name = c( value1, value2, \dots, value-n ) )
```

当外部数据为矩阵时, Data 部分代码结构如下:

```
Data
list( Data.name = matrix ( c( value1, value2, \dots, value-n ) ,
```

nrow = row.number , ncol = column.number) )

参数初始值 Initial 用于启动 MCMC 采样器,代码格式与 Data 部分相同。每个待识别的参数以及随机节点参数都需要合适的初始值,避免数值结果异常或算法收敛过慢。

第3步:代码检查和数据加载。

首先通过 Specification Tool 中的 check model 进行模型检查,其次使用 load data 进行数据加载,然后 compile 编译模型,最后点击 load inits 完成初始值加载。

第4步:设置参数监视器。

该过程通过 WinBUGS 工具栏中的 Inference→Sample Monitor Tool 实现。在‘node’输入处输入参数名,点击‘set’即可完成设置。

第5步:对设置的贝叶斯模型进行后验分布采样。

WinBUGS 会将 model 部分的似然函数和参数先验分布自动相乘得到待识别参数的后验表达。在 Update tool 中的‘updates’输入需要生成的后验样本数量,点击‘update’即可得到所需的后验样本。

综上,WinBUGS 软件可以从已定义的贝叶斯模型中生成指定数量且服从复杂后验分布的后验样本,并用于进一步的统计量分析。

### 1.3 基于贝叶斯理论的桥梁动态称重模型

贝叶斯理论是概率统计领域中的主要理论之一,将模型的未知参数视为随机变量,结合关于参数的先验信息和观测结果,得到未知参数的后验概率分布。因此在参数识别方法中,贝叶斯理论可以达到从概率统计角度重新描述参数识别反问题的目的<sup>[26]</sup>。文中提出的贝叶斯理论桥梁动态称重方法流程如图1所示。其中桥梁动态称重贝叶斯模型主要由3部分组成:

第1部分:通过非接触式识别方法获取的随机影响线矩阵和桥梁动态响应观测值得到似然函数;

第2部分:对待识别参数轴重与观测误差设置合适的先验分布;

第3部分:根据贝叶斯公式联合似然函数与先验分布得到待识别参数的后验概率密度函数。

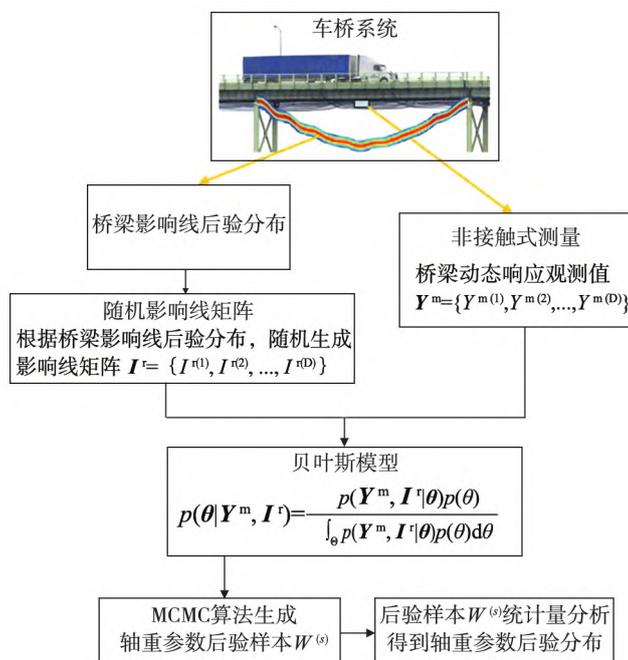


图1 基于贝叶斯理论的桥梁称重方法流程

Fig. 1 Flowchart of bridge weighing based Bayesian theory

依据贝叶斯理论,后验分布可表示为:

$$p(\theta | \psi) = \frac{p(\psi | \theta) p(\theta)}{\int_{\Theta} p(\psi | \theta) p(\theta) d\theta} \quad (5)$$

式中:  $\theta$  为待识别的不确定参数;  $p(\theta | \psi)$  为未知参数的后验分布;  $\psi$  表示基于系统的观测数据;  $p(\theta)$  表示

未知参数的先验分布;  $p(\psi | \theta) = L(\theta)$  表示似然函数(也被称为模型) 根据似然原理<sup>[27]</sup> 有:

$$p(\psi | \theta) = L(\theta | \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \prod_{i=1}^n p(\psi_i | \theta) \quad (6)$$

式中:  $p(\psi_i | \theta)$  为概率密度函数;  $\psi_i$  表示第  $i$  次的观测数据值;  $i$  为观测的次数。

通过机器视觉方式进行桥梁位移响应监测时,可能受到外界噪声干扰。因此,引入误差向量  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$  轴重参数识别的多元线性关系模型<sup>[28]</sup> 表示如下:

$$\mathbf{Y}^m = \mathbf{I}^T \mathbf{W} + \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{Y}^m = [y_1^m, y_2^m, \dots, y_K^m]^T$  表示桥梁动态响应向量;  $\mathbf{I}^T$  是根据桥梁影响线后验分布随机生成的桥梁影响线纵坐标矩阵(  $N \times K$  );  $\mathbf{W}$  是一个包含待求未知轴重参数的轴重向量(  $N \times 1$  );  $\boldsymbol{\varepsilon}^m = [\varepsilon_1^m, \varepsilon_2^m, \dots, \varepsilon_K^m]^T$  表示桥梁动态响应的观测误差。  $\boldsymbol{\varepsilon}^m \sim N_K(0, \boldsymbol{\Sigma}_K)$   $N(0, \boldsymbol{\Sigma}_K)$  表示  $K$  维的零均值多元高斯分布,协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_K = \sigma^2 \mathbf{E}_K$ ,  $\mathbf{E}_K$  表示  $K \times K$  的单位矩阵。

通过多元正态分布概率模型来表示式(7)的线性关系,可得  $\mathbf{Y}^{m(j)} \sim N_K(\mathbf{I}^{(j)} \mathbf{W}, \boldsymbol{\Sigma}_K)$ 。桥梁位移响应观测数据  $\{\mathbf{Y}^{m(1)}, \mathbf{Y}^{m(2)}, \dots, \mathbf{Y}^{m(j)}\}$  可通过机器视觉等非接触式测量方法获取<sup>[29]</sup>,影响线矩阵  $\{\mathbf{I}^{(1)}, \mathbf{I}^{(2)}, \dots, \mathbf{I}^{(j)}\}$  通过已知的桥梁影响线后验分布随机生成,因此  $\mathbf{Y}^{m(j)}$  和  $\mathbf{I}^{(j)}$  视为已知常量。

将轴重向量  $\mathbf{W}$  和协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_K$  中的  $\sigma^2$  视为未知参数,似然函数的表达式如下:

$$L(\mathbf{W}, \sigma^2 | \mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T) = p(\mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T | \mathbf{W}, \sigma^2) \\ = (2\pi)^{-\frac{KD}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_K|^{-\frac{D}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^D (\mathbf{Y}^{m(j)} - \mathbf{I}^{(j)} \mathbf{W})^T \boldsymbol{\Sigma}_K^{-1} (\mathbf{Y}^{m(j)} - \mathbf{I}^{(j)} \mathbf{W})\right\} \quad (8)$$

式中:  $D$  表示纳入计算的桥梁响应工况的总数。此时待识别的参数车辆轴重向量  $\mathbf{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}^T$  和协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_K$  中的  $\sigma^2$  相互独立,因此其联合先验分布表示如式(9):

$$p(\mathbf{W}, \sigma^2) = p(\mathbf{W}) p(\sigma^2) = \prod_{i=1}^N p(w_i) p(\sigma^2) \quad (9)$$

选择待识别参数  $w_i, i = 1, 2, \dots, N$  以及  $\sigma^2$  的先验分布均为无信息先验,具体定义如:  $w_i \sim N(1, 100000000)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\sigma^2 \sim \text{IGam}(0.1, 0.001)$ 。式中,  $w_i$  的设置保证了车辆轴重先验分布的范围足够大,有效包含了车辆轴重的真实值。

根据贝叶斯定理,待识别参数的联合后验概率密度函数为:

$$p(\mathbf{W}, \sigma^2 | \mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T) = \frac{p(\mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T | \mathbf{W}, \sigma^2) p(\mathbf{W}, \sigma^2)}{\int_{\Theta} p(\mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T | \mathbf{W}, \sigma^2) p(\mathbf{W}, \sigma^2) d\mathbf{W} d\sigma^2} \quad (10)$$

对待识别参数联合后验概率密度函数求导可以获得任意车轴  $i$  的轴重值的边缘后验概率密度函数:

$$p(w_i | \mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T) = \int_{\Theta_{w_1}} \int_{\Theta_{w_2}} \dots \int_{\Theta_{w_N}} p(\mathbf{W}, \sigma^2 | \mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T) dw_1 dw_2 \dots dw_{i-1} dw_{i+1} \dots dw_N d\sigma^2 \quad (11)$$

概率密度函数的计算设计高维多元积分式,常规方法难以求解。对于本文的贝叶斯桥梁动态称重(Bayes bridge weigh-in-motion, BBWIM)模型,要使MCMC方法满足本文的采样分布要求,则马尔科夫链服从的平稳分布应与式(11)所示的边缘后验概率密度函数一致,且待识别参数的初始化样本值均设为1,以消除初始样本的影响。

文中利用基于Gibbs采样的WinBUGS软件直接从联合后验概率密度函数(式(11))中抽取随机样本,对后验样本进行分布拟合得到每一个待求车辆轴重  $w_i$  的边缘后验概率密度函数  $p(w_i | \mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T)$ 。进一步,通过求解  $p(w_i | \mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T)$  的最大后验估计值  $w_i^{\text{MAP}}$  得到车轴  $i$  的轴重值识别结果  $W_i^I$ :

$$W_i^I = w_i^{\text{MAP}} = \arg \max p(w_i | \mathbf{Y}^m, \mathbf{I}^T) \quad (12)$$

## 2 非接触式轴重识别数值算例

### 2.1 车桥数值模型

文中选取双车道简支钢筋混凝土梁板式桥梁结构,桥梁横截面如图2所示。选取梁格法建立桥梁

ANSYS有限元分析模型,用等效的纵横向梁单元来代替桥梁上部结构,通过分析梁格的受力状态获得桥梁的动力响应。同时考虑路面不平顺影响,采用ISO SC2/WG4(1972)中的“好(Good)”等级路面<sup>[30]</sup>。桥梁有限元模型如图3所示,桥梁各项参数如下:桥梁长为30 m,宽12 m,桥面下沿桥宽度方向布置5根等距T梁,沿桥梁长度方向上每隔6 m设置横隔板,每根T梁的抗弯刚度 $EI = 10.8 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ,线密度 $\rho_A = 1.868 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,横向梁格单元的抗弯刚度按照矩形单元和T形单元计算分别为 $2.9 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 、 $5.1 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 。桥梁动力响应计算采用瑞利阻尼,阻尼矩阵通过式(13)确定,其中, $\xi$ 表示桥梁结构的阻尼比,一般混凝土桥梁的阻尼比为0.02~0.03,文中按照经验取值 $\xi = 0.02$ ;  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 分别为桥梁结构任意两阶圆频率,一般取结构频率响应的第一阶频率和第二阶频率;而桥梁子系统的质量矩阵 $M_b$ 和刚度矩阵 $K_b$ 均可通过有限元软件求解得到,得出阻尼系数为 $\alpha = 1.760$ , $\beta = 1.19871 \times 10^{-3}$ 。

$$C_b = \frac{2\xi \omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} M_b + \frac{2\xi}{\omega_1 + \omega_2} K_b \quad (13)$$

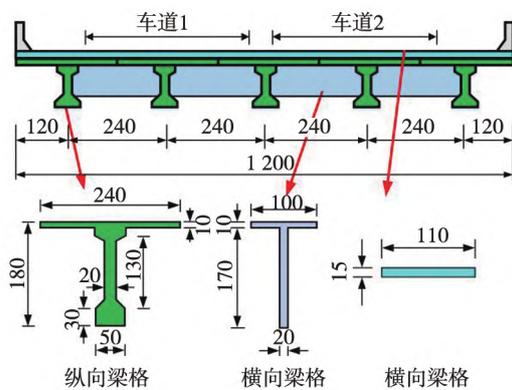


图2 桥梁横截面(单位:mm)

Fig. 2 Bridge cross section (Unit: mm)

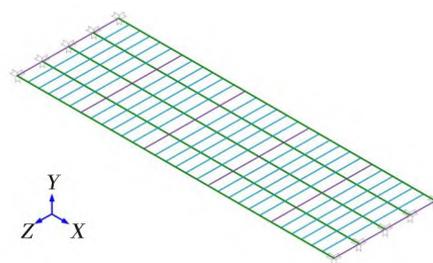


图3 桥梁结构有限元模型

Fig. 3 Finite element model of bridge structure

采用二维平面上的半车模型<sup>[31]</sup>对车辆进行建模,如图4所示。该模型具有4个自由度:车体竖向位移 $y_s$ ,车体转动角度 $\theta_s$ ,车辆前悬挂系统竖向位移 $y_1$ ,车辆后悬挂系统竖向位移 $y_2$ 。 $M_s$ 表示车体质量, $m_1$ 和 $m_2$ 分别表示车辆前后悬挂质量,车体和悬挂系统通过线刚度为 $k_{s1}$ 、 $k_{s2}$ 的弹簧(其表示悬架刚度)和阻尼系数为 $c_{s1}$ 、 $c_{s2}$ 的黏性阻尼器(其表示悬架阻尼)连接,悬挂系统与路面通过线刚度为 $k_{t1}$ 、 $k_{t2}$ 的弹簧(其表示轮胎刚度)和阻尼系数为 $c_{t1}$ 、 $c_{t2}$ 的黏性阻尼器(其表示轮胎阻尼)连接。 $l_u$ 表示轴距, $\alpha_1 l_u$ 表示前轴到车体重心的距离, $\alpha_2 l_u$ 表示后轴到车体重心的距离。 $I_a$ 表示车体的转动刚度。

依据文献[28]介绍的车辆随机工况生成方式,生成车型一—公交车、车型二—大型客车、车型三—2轴6轮货车的大量随机工况,并通过车桥耦合模型<sup>[28]</sup>对每个车辆随机工况均生成相应的桥梁位移响应输出向量。在车桥耦合模型中,通过车桥接触点位置的位移协调方程和相互作用力关系使车辆和桥梁2个振动子系统整体耦合,并通过MATLAB程序与ANSYS有限元软件进行全过程迭代计算。数值算例中车辆模型轴荷载和轴距大小由相应车型的参数统计区间随机抽样产生,并通过随机组合增加模拟试验工况的多样性和随机性。轴荷分配值区间为0.35~0.65,行驶速度区间为10~30 m/s。车辆模型的悬挂质量、悬挂和轮胎刚度、悬挂和轮胎阻尼等参数对车致响应的影响不大,故取简化后的定值<sup>[32-34]</sup>。车辆确定性参数取值如表1所示,随机参数的分布情况如表2所示,其中车体质量 $M_s$ 表示总质量与悬挂质量( $m_1$ 与 $m_2$ )之差。

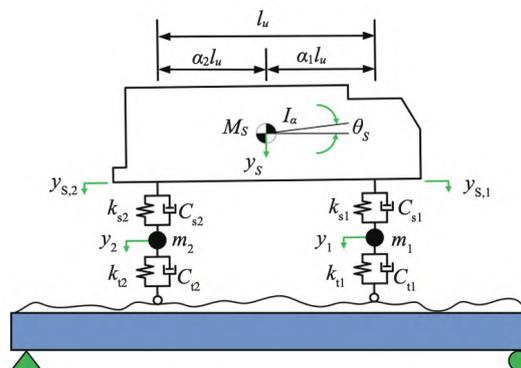


图4 二轴车半车模型

Fig. 4 Half model of two axle car

表 1 车辆数值模型确定性参数

Table 1 Deterministic parameter of the vehicle numerical model

车型	$m_1, m_2 / \text{kg}$	$k_{t1}, k_{t2} / (\text{kN} \cdot \text{m}^{-1})$	$k_{s1}, k_{s2} / (\text{kN} \cdot \text{m}^{-1})$	$c_{t1}, c_{t2} / (\text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	$c_{s1}, c_{s2} / (\text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$
大型客车	500 600	1 200 2 000	500 500	3 3	12 27
公交车	600 600	1 500 1 800	400 400	3 3	15 20
2 轴 6 轮货车	400 600	2 000 2 500	400 400	3 3	18 25

表 2 车辆数值模型随机参数分布

Table 2 Random parameters of the vehicle numerical model

车型	速度 $v / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	轴距 $l_u / \text{m}$	前轴(1 轴) 轴荷分配系数 $\alpha_1$	车体质量 $M_s / \text{kg}$
大型客车	$U(10, 30)$	$U(3.8, 6.3)$	$N(0.3409, 0.0319)$	$U(300, 16900)$
公交车	$U(10, 30)$	$U(3.3, 6.1)$	$N(0.3580, 0.0252)$	$U(4800, 16800)$
2 轴 6 轮货车	$U(10, 30)$	$U(2.3, 5.8)$	$N(0.3847, 0.0372)$	$U(400, 17000)$

2.2 轴重识别数值验证

待称重车辆对应的桥梁动态响应通过车桥耦合数值模型<sup>[28]</sup>获得, 作为非接触式测量的桥梁动态响应观测值参与后续轴重识别的数值验证。桥梁影响线的后验分布由按照随机均匀分布原则和随机参数组合原则生成的 600 组公交车型工况, 结合每个工况对应的动位移响应计算所得。图 5 为该组随机工况下的影响线识别结果, 其中 MAP 影响线为识别出的最大后验估计影响线 (Maximum a posteriori estimation influence line, MAPIL), 而静力影响线则是通过桥梁有限元模型静力加载得到<sup>[28]</sup>。MAPIL 与静力影响线之间的识别误差为 6.88%。

桥梁动态响应和桥梁影响线后验分布已知, 通过文中提出的贝叶斯桥梁动态称重模型进行后续车辆轴重计算。以前轴轴重为  $W_1$  (真实值为: 54.164 kN) 的公交车型工况计算过程为例, 按照图 1 所示贝叶斯桥梁称重方法进行计算。首先通过已知的基于公交车型随机工况数据识别所得的桥梁影响线后验分布, 生成随机影响线矩阵数据。然后将待称重车辆通过桥梁时的桥梁响应数据与式(9)的贝叶斯参数识别模型结合。随后通过 WinBUGS 软件生成 3 000 个前轴轴重参数  $W_1$  的马尔可夫样本。再通过对轴重参数  $W_1$  的马尔可夫样本进行正态分布拟合, 可以得到轴重参数  $W_1$  的边缘后验概率密度函数和后验分布, 如图 6 所示, 结果表明, 代入桥梁响应数据和随机影响线矩阵数据对模型中提前设置的均值为 1, 方差为  $1 \times 10^9$  的轴重参数  $W_1$  先验分布进行更新后, 轴重参数  $W_1$  的后验分布最大后验估计值更新为 57.609 kN, 与真实值之间的误差为 6.36%, 验证了所提算法的有效性。

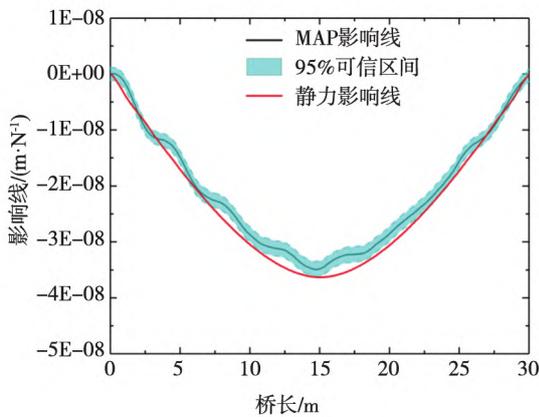


图 5 模拟算例中桥梁影响线识别结果

Fig. 5 Identification result of bridge influence line in simulation example

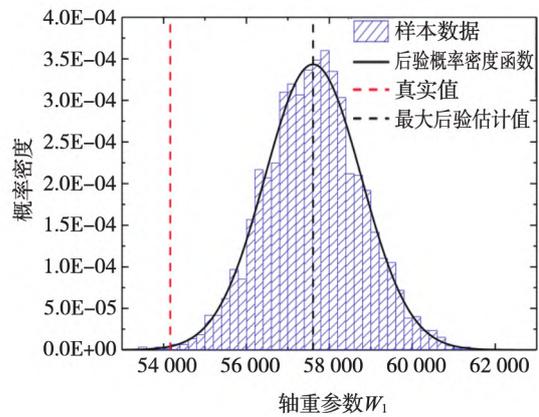


图 6 前轴轴重  $W_1$  识别结果

Fig. 6 Identification result of front axle load  $W_1$

为验证所提方法的识别精度, 利用 BBWIM 方法进行批量的轴重识别, 并与基于静力影响线的轴重识别结果进行对比。选取多车型多工况进行轴重批量识别验证, 因此分别生成 100 组车型一—公交车、车型二—大客

车以及车型三一2轴6轮货车的随机工况,车辆行驶速度设置为10 m/s。轴重误差的计算方法如式(14):

$$Err = \frac{W_i^j - W_i}{W_i} \times 100\% \quad (14)$$

式中:  $W_i^j$  表示轴重的识别结果;  $W_i$  表示轴重的真实值。

图7显示了轴重识别数值验证的识别误差。其中 Baseline 表示采用静力影响线和式(3)进行轴重识别的确定性结果。Case1~3 分别表示公交车、大客车以及2轴6轮货车。结果表明,对于各工况而言,前轴  $W_1$  轴重识别误差波动范围最大,而总重的识别误差最稳定。

数值算例平均绝对误差的对比结果如表3所示。计算结果表明,受反问题求解时病态方程和车桥耦合动力效应的影响,基于静力影响线(Baseline)的确定性轴重识别仍会产生些许误差,但识别精度较高,误差仅为-1.1%~4.64%。此外,相比 Case2~3, Case1 影响线后验分布范围集中,MAPIL 趋近静力影响线,总重与轴重识别效果良好。而 Case2~3, Case1 影响线后验分布范围不一致的原因在于:由表2可知,公交车的随机车体质量  $M_s$  的分布范围要明显小于大客车和2轴6轮货车,这导致在生成相同数量的虚拟轴重输入时,每个工况下公交车生成的虚拟轴重会更接近真实轴重,进而在进行桥梁影响线后验分布反演时,会得到准确性更高的最大后验估计影响线。如要降低 Case2~3 的25%误差,合理方法为将大客车与2轴6轮货车进行更精细的车辆分类,缩小随机车体质量分布范围,以得到更精确的影响线后验分布。

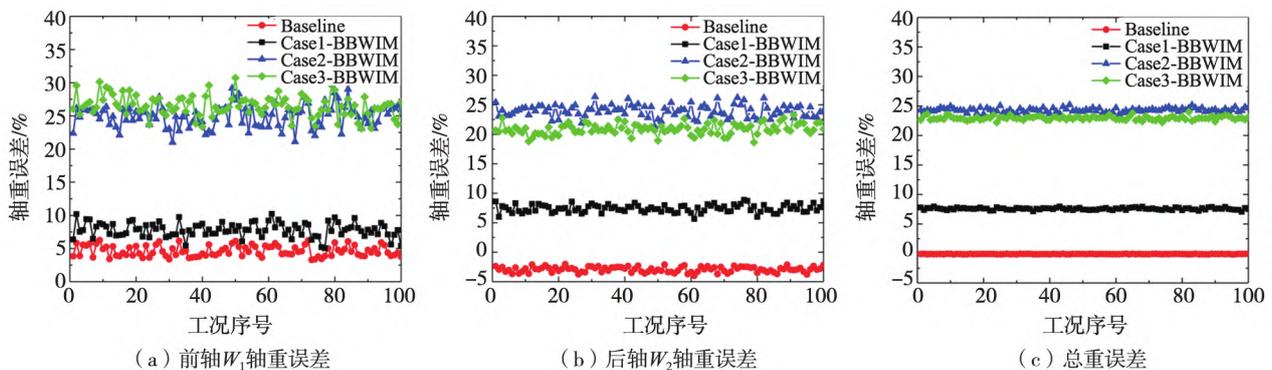


图7 基于贝叶斯理论的桥梁动态称重误差

Fig. 7 Bridge weigh-in-motion error based on Bayes' theorem

表3 动态称重数值算例平均绝对误差

Table 3 Average absolute error of numerical example of weigh-in-motion

动态称重误差/%	静力影响线识别	Case1-BBWIM	Case2-BBWIM	Case3-BBWIM
前轴识别误差	4.64	7.82	24.93	26.51
后轴识别误差	-2.92	7.43	23.95	20.90
总重识别误差	-1.10	7.56	24.30	22.97

### 3 实验室模型试验

#### 3.1 缩尺车桥模型与试验工况设置

文中采用的实验室加载平台由一单跨简支T型梁桥与三轴货车缩尺模型组成<sup>[34]</sup>,试验平台整体示意图如图8所示。其中加速坡道和减速坡道高度均为2.0 m,长度分别为3.0 m和3.1 m。加速坡道前端设置1.5 m长的水平段,确保车辆模型匀速通过桥梁模型。桥梁模型材料为有机玻璃,杨氏模量为2 795 MPa,密度为1 181.6 kg/m<sup>3</sup>,与真实桥梁尺寸相似比为0.119:1,应变相似比为1:1<sup>[35]</sup>。单跨简支T型梁桥模型跨长为2.38 m,桥面板宽度为

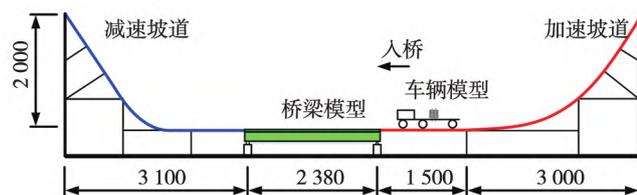


图8 试验平台整体示意图(单位:mm)

Fig. 8 Schematic diagram of the whole test platform( Unit: mm)

1.01 m 桥梁横截面由 4 根 T 梁组成,详细数据如图 9 所示。

桥梁模型的 2 号主梁底部和桥面板的车道线处共布置 6 个信号测点。其中测点 1、2、3 设置的用于采集梁底弯矩应变响应的应变花分别布置于 2 号主梁的 1/4 处、1/2 处和 3/4 处; 位于桥面板的车道线测点 5、6 的电阻式应变片用于采集车辆模型入桥和出桥时的应变信号; 测点 4 位于 2 号主梁的 1/2 处,用于采集梁底 1/2 处的位移响应。桥梁模型及测点布置如图 9 所示,室内车桥耦合试验装置现场照见图 10。

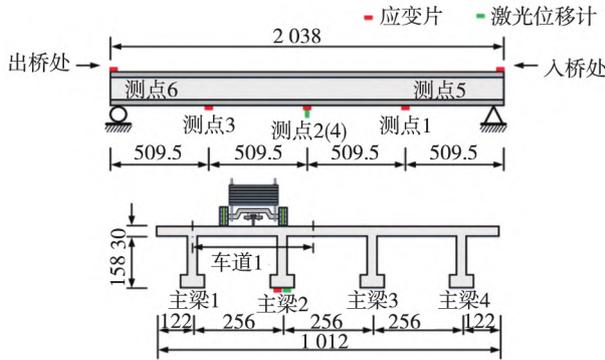


图 9 桥梁模型及测点布置示意图(单位: mm)

Fig. 9 Bridge model and measuring point arrangement (Unit: mm)

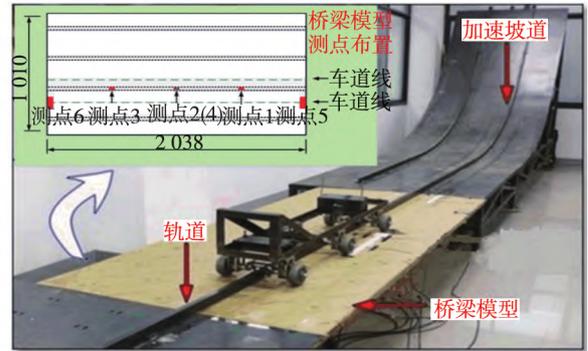


图 10 室内车桥耦合试验装置(单位: mm)

Fig. 10 Indoor testing apparatus (Unit: mm)

试验车辆模型以国产东风 EQ3166 载重卡车为原型进行相似比设计。该车辆模型由钢结构制作,车头和车体通过一组铰链连接<sup>[34]</sup>。通过调整车上钢板的位置和数量,可以得到不同的轴荷分配系数和车辆轴重。车辆模型的总长度约为 1.36 m,宽度约为 0.2 m,车辆模型共有 3 个车轴表示为  $A_1$  轴、 $A_2$  轴和  $A_3$  轴,其分别对应轴重  $W_1$ 、 $W_2$  和  $W_3$ 。车辆轴距  $AS_1$  为 0.31 m,轴距  $AS_2$  为 0.55 m,如图 11 所示。

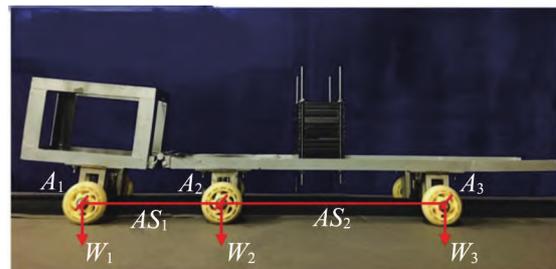


图 11 三轴卡车模型

Fig. 11 Model of three-axle truck

### 3.2 轴重识别试验验证

实验室待称重三轴车通过桥梁时的位移响应由位于测点 4 的激光位移计采集得到,作为非接触式测量的桥梁动态响应观测值参与后续轴重识别的试验验证。通过随机设置车上钢片的位置和数量,得到 200 组试验载重工况 M1 ~ M200<sup>[28]</sup>; 由于桥面以及车辆轨道摩擦力的影响,因此采用车辆过桥平均速度计算车轴实时位置。桥梁模型的整体位移影响线后验分布如图 12(a) 所示; 最大后验估计影响线(MAPIL)与基准影响线的误差为 3.09%,如图 12(b) 所示。

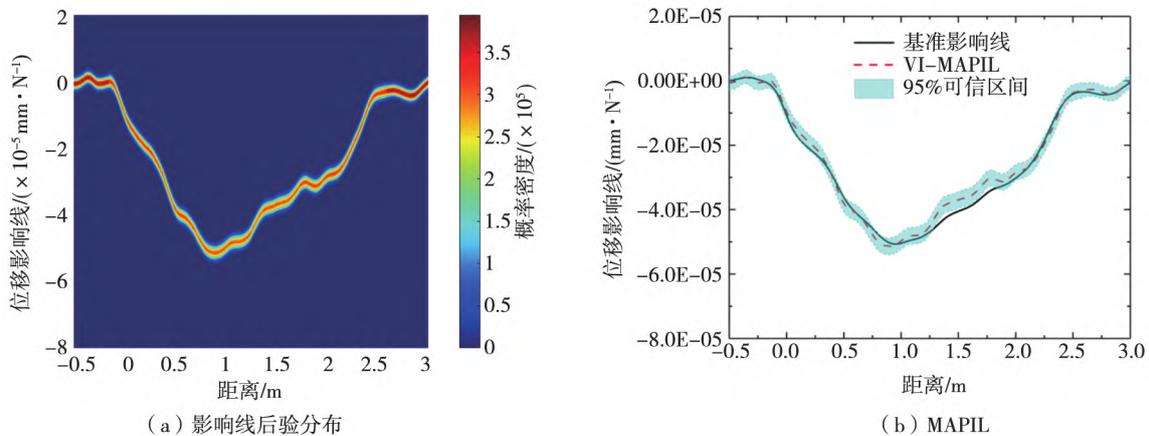


图 12 位移影响线后验分布及 MAPIL 识别结果

Fig. 12 Posterior distribution of displacement influence lines and identification results of MAPIL

为验证文中所提 BBWIM 方法的可行性,结合 3.1 节所示实验室车桥模型和图 12 所示的桥梁模型位移影响线后验分布,对三轴车辆模型进行动态称重测试。3 组工况的车速以及对应的载重工况序号为:  $V_1 =$

1.175 m/s (M1~M20)、 $V_2 = 1.902$  m/s (M21~M40) 以及  $V_3 = 2.987$  m/s (M41~M60)。

实验室三轴车总重(GVW)与各轴重( $W_1$ 、 $W_2$ 、 $W_3$ )的识别误差如图13所示,表4为实验室桥梁动态称重平均绝对误差的对比结果。其中Baseline表示采用基准位移影响线和式(3)进行轴重识别的确定性结果。BBWIM表示采用本文所提BBWIM方法进行轴重识别的轴重最大后验估计值。由表4可知,随着车速的增加, $W_1$ 、 $W_2$ 的识别误差从7%增加到12%,说明车速越快,轴重识别误差越大。

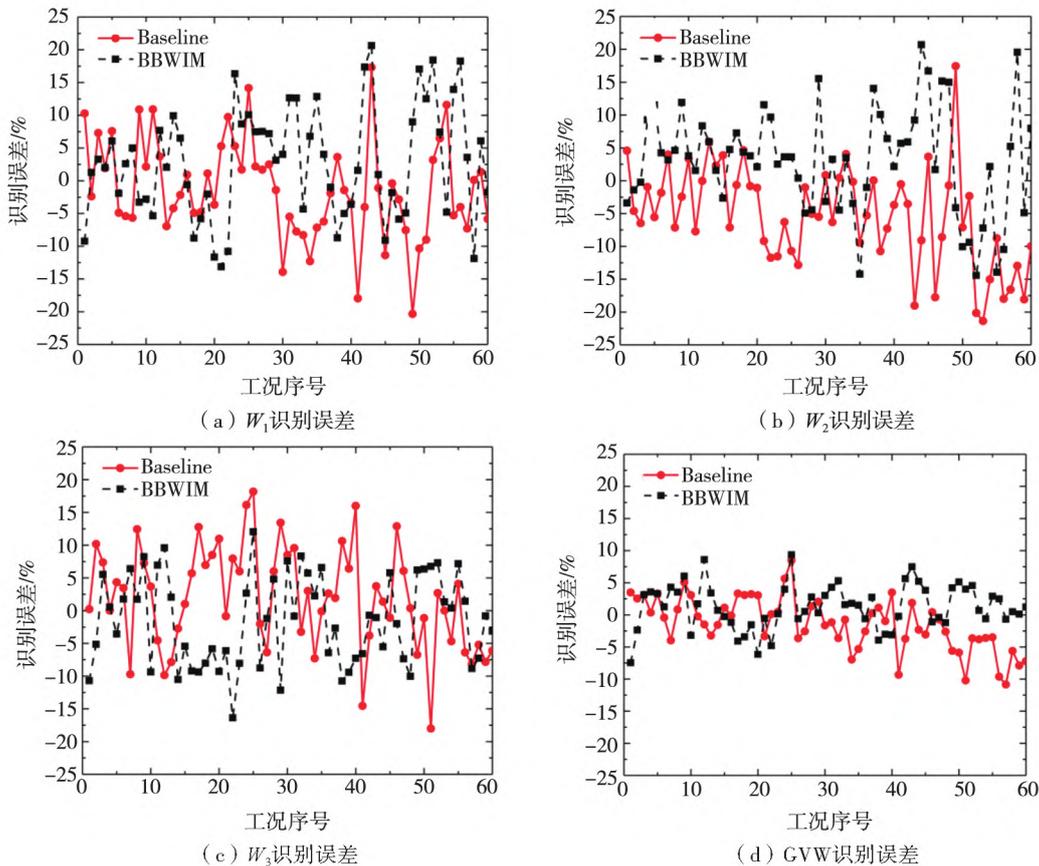


图13 三轴车辆模型动态称重误差

Fig. 13 Weigh-in-motion error of three axle vehicle model

对于车辆总重识别,基准位移影响线与BBWIM的总重识别结果明显优于相应轴重识别结果,识别误差均在6%以内,并且随着车速增加,总重识别误差仍有较强的稳定性。车速达到 $V_3 = 2.987$  m/s时,BBWIM方法的识别误差为2.61%,优于基准影响线(误差为5.08%)。

整体而言,BBWIM方法的识别效果和基于基准影响线的识别效果具有较好的一致性,均控制在12%以内,验证了所提方法进行轴重识别的可行性。

另一方面,BBWIM轴重识别精度随车速的增加而降低,但车辆总重识别精度不受车速影响且识别效果优于轴重识别结果。此外,车速较快( $V_3 = 2.987$  m/s)时,BBWIM的车辆总重识别效果优于基准影响线总重识别效果。与基准影响线方法相比,BBWIM的优势主要体现在2点:(1)贝叶斯理论可以融合外部数据对待识别信息进行更新,提升识别精度;(2)BBWIM无需封闭交通,无需BWIM系统支持,节约成本,降低风险。

文中提出的非接触式BBWIM更适用于刚度较小的中小桥梁,原因主要有2点:(1)对于经济效应显著的大型桥梁,一般会通过在桥梁上长期布置精细的传感器监测系统用于桥梁动态称重,因此不需要布置传感器的非接触式BBWIM对于广大经济效应不明显的中小桥梁来说,应用空间更大;(2)非接触式BBWIM需要依靠机器视觉实现桥梁响应的识别,因此桥梁刚度越小,桥梁响应越明显,识别精度也越高,对于非接触式机

表4 动态称重试验平均绝对误差

Table 4 Average absolute error of weigh-in-motion test

动态称重误差/%	基准位移影响线识别			BBWIM方法识别		
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$
3轴车- $W_1$	5.10	5.77	7.37	4.89	8.00	9.35
3轴车- $W_2$	3.75	6.11	11.53	4.79	6.10	9.98
3轴车- $W_3$	6.48	7.32	5.74	6.47	7.00	4.80
3轴车-GVW	2.33	2.77	5.08	3.46	2.70	2.61

器视觉的要求也更低更易实现。

以上为文中 BBWIM 算法在实验室模型试验中的结果分析。当该 BBWIM 算法应用于实际工程时,平均轴重识别误差会有所增大。主要原因有以下 3 点:(1) 车辆实际速度比实验室车速更快,桥梁结构与车辆接触时间变短,车桥耦合不充分,动力荷载效应使影响线识别结果的不确定性增大;(2) 实际工程中,通过机器视觉识别车辆出入桥时刻会产生一定延迟,使桥梁响应数据与车辆荷载位置对应关系的精确性受到负面影响;(3) 实际工程中,车辆会产生横向位移,导致桥梁纵梁的竖向位移差值百分比为 2.5%~5%,弯矩差值百分比最大为 32.2%<sup>[36]</sup>,忽略车辆横向位置变化使车桥耦合振动分析产生偏差。

## 4 结论

文中提出一种基于贝叶斯理论的桥梁动态称重方法。该方法通过非接触式测量方法获取桥梁动态响应观测值与待测车辆轴距、速度等信息,并根据已知的桥梁影响线后验分布随机生成影响线矩阵,将影响线矩阵和桥梁动态响应观测值代入文中所提出的贝叶斯模型,计算得到轴重参数后验样本,并对后验样本统计分析,所得最大后验估计值即为最终轴重识别结果。通过车桥耦合数值模型和室内车桥模型试验对所提方法的可行性进行了验证。结论如下:

(1) 文中根据贝叶斯理论有效处理 CBWIM 系统求解时的病态、不适宜以及结果不唯一等问题的能力,通过贝叶斯理论中的联合先验分布与似然函数表示待识别轴重参数的联合后验概率密度,提出了基于贝叶斯理论的桥梁动态称重方法,并验证了该方法的可行性。

(2) 通过数值模拟发现,桥梁影响线后验分布范围越集中,对应的 MAPIL 精度越高, BBWIM 轴重识别精度越高,最优识别误差在 8% 以内。

(3) 通过室内车桥模型试验发现,多车速工况下 BBWIM 轴重识别精度随车辆行驶速度的增加而降低,但车辆总重识别精度不受车速影响,其误差基本处于 5% 以内,且 BBWIM 总重识别效果比单一轴重识别结果以及基准影响线总重识别效果更优。

## 参考文献:

- [1] 中华人民共和国交通运输部. 2020 年交通运输行业发展统计公报 [EB/OL]. [2021-05-19]. [https://xxgk.mot.gov.cn/2020/jigou/zhghs/202105/t20210517\\_3593412.html](https://xxgk.mot.gov.cn/2020/jigou/zhghs/202105/t20210517_3593412.html).  
Ministry of Transport, PRC. Statistical bulletin on the development of the transport industry in 2020 [EB/OL]. [2020-05-19]. [https://xxgk.mot.gov.cn/2020/jigou/zhghs/202105/t20210517\\_3593412.html](https://xxgk.mot.gov.cn/2020/jigou/zhghs/202105/t20210517_3593412.html). (in Chinese)
- [2] 易仁彦. 桥梁坍塌事故的原因和风险分析 [J]. 养护与管理, 2016(4): 22-26.  
YI Renyan. Causes and risk analysis of bridge collapse accidents [J]. Maintenance and Management, 2016(4): 22-26. (in Chinese)
- [3] 彭卫兵, 沈佳栋, 唐翔, 等. 近期典型桥梁事故回顾、分析与启示 [J]. 中国公路学报, 2019, 32(12): 132-144.  
PENG Weibing, SHEN Jiadong, TANG Xiang, et al. Review, analysis, and insights on recent typical bridge accidents [J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 32(12): 132-144. (in Chinese)
- [4] MOSES F. Weigh-in-motion system using instrumented bridges [J]. Transportation Engineering Journal of ASCE, 1979, 105(3): 233-249.
- [5] DENG L, CAI C S. Identification of dynamic vehicular axle loads: theory and simulations [J]. Journal of Vibration and Control, 2010, 16(14): 2167-2194.
- [6] 王宁波. 非路面式桥梁动态称重理论与试验研究 [D]. 长沙: 中南大学, 2013.  
WANG Ningbo. Non-Pavement Bridge Weigh-in-Motion: Theoretical and Experimental Study [D]. Changsha: Central South University, 2013. (in Chinese)
- [7] O'BRIEN E J, ZHANG L, ZHAO H, et al. Probabilistic bridge weigh-in-motion [J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 2018, 45(8): 667-675.
- [8] GONÇALVES M S, CARRARO F, LOPEZ R H. A gradient based optimization procedure for finding axle weights in probabilistic bridge weigh-in-motion method [J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 2021, 48(5): 570-574.
- [9] WAHBEH A M, CAFFREY J P, MASRI S F. A vision-based approach for the direct measurement of displacements in vibrating systems [J]. Smart Materials and Structures, 2003, 12(5): 785-794.
- [10] ZAURIN R, CATBAS F N. Integration of computer imaging and sensor data for structural health monitoring of bridges [J]. Smart Materials and Structures, 2009, 19(1): 015019.
- [11] LYDON D, LYDON M, DEL RINCÓN J M, et al. Development and field testing of a time-synchronized system for multi-point displacement calculation using low-cost wireless vision-based sensors [J]. IEEE Sensors Journal, 2018, 18(23): 9744-9754.

- [12] OJIO T, CAREY C H, OBRIEN E J, et al. Contactless bridge weigh-in-motion[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2016, 21(7): 04016032.
- [13] ZHOU Y, PEI Y L, LI Z W, et al. Vehicle weight identification system for spatiotemporal load distribution on bridges based on non-contact machine vision technology and deep learning algorithms[J]. *Measurement*, 2020, 159(3): 107801.
- [14] FENG M Q, LEUNG R Y, ECKERSLEY C M. Non-contact vehicle weigh-in-motion using computer vision[J]. *Measurement*, 2020, 153: 107415.
- [15] DAN D H, GE L F, YAN X F. Identification of moving loads based on the information fusion of weigh-in-motion system and multiple camera machine vision[J]. *Measurement*, 2019, 144: 155-166.
- [16] BECK J L. Bayesian system identification based on probability logic[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2010, 17(7): 825-847.
- [17] ZONTA D, BRUSCHETTA F, ZANDONINI R, et al. Sensor Fusion on Structural Monitoring Data Analysis: Application to a Cable-stayed Bridge [C]//Key Engineering Materials. Trans Tech Publications Ltd, 2013, 569: 812-819.
- [18] SUN H, BÜYÜKÖZTÜRK O. Identification of traffic-induced nodal excitations of truss bridges through heterogeneous data fusion[J]. *Smart Materials and Structures*, 2015, 24(7): 075032.
- [19] YOSHIDA I, SEKIYA H, MUSTAFA S. Bayesian bridge weigh-in-motion and uncertainty estimation[J]. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A: Civil Engineering*, 2021, 7(1): 04021001.
- [20] ANDRIEU C, DE FREITAS N, DOUCET A, et al. An introduction to MCMC for machine learning[J]. *Machine Learning*, 2003, 50(1/2): 5-43.
- [21] TURER A, AKTAN A. Issues in superload crossing of three steel stringer bridges in Toledo, Ohio[J]. *Transportation Research Record*, 1999, 1688(1): 87-96.
- [22] 王宁波, 任伟新, 李苗. 基于影响线的桥梁移动荷载识别[J]. *振动与冲击*, 2013, 32(3): 129-133.  
WANG Ningbo, REN Weixin, LI Miao. Moving load identification of a bridge based on influence line[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(3): 129-133. (in Chinese)
- [23] MARKOV A A. Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga[J]. *Izvestiya Fiziko-Matematicheskogo Obschestva Pri Kazanskom Universitete*, 1906, 15(18): 135-156.
- [24] RUBINSTEIN R Y, KROESE D P. *Simulation and the Monte Carlo Method*[M]. Hoboken N J, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2016.
- [25] NTZOUFRAS I. *Bayesian Modeling Using WinBUGS*[M]. Hoboken N J, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [26] KAIPIO J, SOMERSALO E. *Statistical and Computational Inverse Problems*[M]. Springer Science & Business Media, 2006.
- [27] CASELLA G, BERGER R L. *Statistical Inference*[M]. Pacific Grove, CA: Duxbury, 2001.
- [28] 胡健鑫. 基于车辆大数据与贝叶斯理论的中小桥梁结构识别研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2021.  
HU Jianxin. Research on Structural Identification of Small and Medium Bridges Based on Big Data of Vehicles and Bayesian Theory [D]. Changsha: Hunan University, 2021. (in Chinese)
- [29] 程依婷. 基于数字图像相关理论的非接触式结构位移测量方法研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2020.  
CHENG Yiting. Research on the Non-Contact Structural Displacement Measurement Based on Digital Image Correlation Method [D]. Changsha: Hunan University, 2020. (in Chinese)
- [30] DODDS C J, ROBSON J D. The description of road surface roughness[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 31(2): 175-183.
- [31] GREEN M F, CEBON D, COLE D J. Effects of vehicle suspension design on dynamics of highway bridges[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1995, 121(2): 272-282.
- [32] 郭正康. 汽车整车转动惯量的计算与选取[J]. *汽车研究与开发*, 1993(6): 42-44.  
GUO Zhengkang. Calculation and selection of vehicle rotational inertia [J]. *Automobile Research & Development*, 1993(6): 42-44. (in Chinese)
- [33] 邓露, 段林利, 何维, 等. 中国公路车-桥耦合振动车辆模型研究[J]. *中国公路学报*, 2018, 31(7): 92-100.  
DENG Lu, DUAN Linli, HE Wei, et al. Study on vehicle model for vehicle-bridge coupling vibration of highway bridges in China [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2018, 31(7): 92-100. (in Chinese)
- [34] OBRIEN E J, CANTERO D, ENRIGHT B, et al. Characteristic Dynamic Increment for extreme traffic loading events on short and medium span highway bridges[J]. *Engineering Structures*, 2010, 32(12): 3827-3835.
- [35] HE Wei, DENG Lu, SHI Hai, et al. Novel virtual simply supported beam method for detecting the speed and axles of moving vehicles on bridges [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2017, 22(4): 04016141.
- [36] 韩万水, 马麟, 汪炳, 等. 随机车流-桥梁系统耦合振动精细化分析与动态可视化[J]. *中国公路学报*, 2013, 26(4): 78-87.  
HAN Wanshui, MA Lin, WANG Bing, et al. Refinement analysis and dynamic visualization of traffic-bridge coupling vibration system [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2013, 26(4): 78-87. (in Chinese)