

DOI: 10.7511/jslx20210813001

# 基于应变能与频率灵敏度的静动力双目标 ESO

张鹤志<sup>\*1,2</sup>, 张棒<sup>1</sup>, 周云<sup>2</sup>, 谢献忠<sup>1</sup>

(1. 湖南科技大学 土木工程学院, 湘潭 411201; 2. 湖南大学 土木工程学院, 长沙 410082)

**摘要:**当前在运用渐进结构优化(ESO)时,大多仅设定了单一的静力或动力目标,难以满足工程结构设计的需求。为此,将单目标优化常用的应变能灵敏度和频率灵敏度进行无量纲处理,再与多目标优化理论结合,开发出静动力双目标 ESO。通过多个不同边界条件的深受弯构件数值算例,证实了新方法的运行稳定性和普遍适用性,同时还得到了静力优化与动力优化间的权重系数比取值建议。有限元对比分析结果表明,该新方法相较于传统的单目标优化,能够兼顾结构的静动力性能,使结构耗材减少但静力刚度基本维持,同时材料利用率和一阶固有频率还能不断提升。

**关键词:**渐进结构优化;双目标优化;动力优化;应变能灵敏度;频率灵敏度;拓扑优化;结构优化设计

**中图分类号:**O302;O224 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2023)02-0192-06

## 1 引言

近年来兴起的拓扑优化方法在工程结构设计领域得到广泛的应用研究,尤其是在机械工程<sup>[1,2]</sup>、材料工程<sup>[3]</sup>和工程力学<sup>[4]</sup>等领域。拓扑优化方法可分为离散体拓扑优化和连续体拓扑优化,前者以最小质量桁架解<sup>[5]</sup>为主,后者包括渐进结构优化(ESO)算法<sup>[6]</sup>和固体各向同性材料惩罚方法(SIMP)<sup>[7]</sup>等。其中 ESO 算法思路简洁,稳定性强,又逐渐衍生出双向渐进结构优化(BESO)算法<sup>[8]</sup>和遗传演化结构优化(GESO)算法<sup>[9]</sup>等。

这些算法最初大多用于结构静力拓扑优化。直到近些年开始引入结构动力拓扑优化,如 Xu 等<sup>[10]</sup>开发出提高结构一阶固有频率的改进 ESO 算法;Ghaffarianjam 等<sup>[11]</sup>提出一种新单元删除准则,对结构刚度、频率和质量约束等结构静动力性能展开 ESO;Lee 等<sup>[12]</sup>凭借等效静荷载思想,部分解决动力荷载下的拓扑优化问题;Yilmaz 等<sup>[13]</sup>探讨了结构在简谐激励下最小动柔顺度的拓扑优化;彭涛等<sup>[14]</sup>利用快速非支配排序遗传算法开展静动力结构优化。以上优化研究大多仅针对结构动力性能,事实上,发展静动力双目标拓扑优化,是推动拓扑优化方法指导工程结构设计的必经之路。

## 2 静动力双目标 ESO

### 2.1 基本思想

多目标问题与单目标问题的最大区别在于多个优化目标之间可能存在相互制约。在多目标优化问题中,任意两个解之间不一定能直接比较优劣,一般也很难寻得使各个目标函数同时达到最优的解。此时,寻优思路需转化为寻找相对较优的非劣解,数学模型为

$$\begin{cases} \text{求: } x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ \text{向量最小化: } \mathbf{F}(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}^T \\ \text{需服从: } g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $x$  为设计变量向量,  $\mathbf{F}(x)$  为目标函数向量,  $f_n(x)$  为第  $n$  个目标函数,  $g_i(x)$  为第  $i$  个约束函数。

### 2.2 算法灵敏度

给定重量下,以刚度最大为单目标的静力优化,通常以移除结构中任意的第  $i$  号单元引起结构平均应变能的改变量  $\Delta C_i$  作为该单元的灵敏度,

$$\Delta C_i = \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i \quad (2)$$

式中  $\mathbf{K}_i$  为第  $i$  号单元的刚度矩阵,  $\mathbf{u}_i$  为第  $i$  号单元的位移向量。

以结构固有频率最大为单目标的动力优化中,当移除结构中任意的第  $i$  号单元时,频率的改变量

收稿日期:2021-08-13;修改稿收到日期:2021-11-18.

基金项目:国家自然科学基金(51508182);湖南省自然科学基金(2021JJ30270)资助项目.

作者简介:张鹤志<sup>\*</sup>(1984-),男,博士,副教授  
(E-mail:zhanghz\_hnu@163.com).

$\Delta \omega_i$  即为该单元的灵敏度,

$$\Delta(\omega_i) = \{\varphi_i\}^T (\omega_i m_i - k_i) \{\varphi_i\} \quad (3)$$

式中  $k_i$  和  $m_i$  分别为移除的第  $i$  号单元的单元刚度矩阵和单元质量矩阵,  $\varphi_i$  为其特征向量。

将以上应变能灵敏度和频率灵敏度结合,构建静动力双目标优化灵敏度。由于两者有着完全不同的量纲,需要使用归一化方法中的极值法,先将其进行无量纲处理,计算各目标函数的新灵敏度  $U_i(x)$ , 即

$$U_i(x) = \left| \frac{A(x_i) - A_{\min}}{A_{\max} - A_{\min}} \right| \quad (4)$$

式中  $A(x_i)$  为各目标函数的灵敏度,  $A_{\min}$  和  $A_{\max}$  分别为相应的最小值和最大值。

再利用线性加权法构造出静动力双目标优化所需的灵敏度  $G(x_i)$ ,

$$G(x_i) = \omega_1 U_i^c(x) + \omega_2 U_i^w(x) \quad (5)$$

式中  $\omega_1$  和  $\omega_2$  分别为静力优化权重系数和动力优化权重系数,两值总和须为 1,  $U_i^c(x)$  和  $U_i^w(x)$  分别为按式(4)得到的归一化后的应变能灵敏度和频率灵敏度。

### 2.3 优化参数

(1) 自适应优化相关参数。单目标静力优化可能存在网格依赖问题,单目标动力优化可能出现模态震荡问题。为避免静动力双目标 ESO 中出现上述问题,在完成归一化灵敏度计算之后,参考文献[15]的方法进行处理,按式(6)计算每代的非劣等单元灵敏度筛选值  $\alpha_j$  作为单元优胜劣汰的限值,

$$\alpha_j = \mu_j^* \times \sum_{i=1}^N G(x_i) / N \quad (6)$$

式中  $N$  为本代单元总数,  $\mu_j^*$  为第  $j$  代的非劣等单元灵敏度控制系数,参考文献[15]的做法,在优化过程中,依据前一代删除单元的数量对其值进行自适应调整,

$$\mu_j^* = \begin{cases} \mu_{j-1}^* + E & (\beta < \beta_1) \\ \mu_{j-1}^* & (\beta_1 < \beta < \beta_2) \\ n \cdot \mu_{j-1}^* & (\beta > \beta_2 \text{ 且 } \mu_{j-1}^* \leq \mu_0) \\ \mu_{j-1}^* - \mu_0^* & (\beta > \beta_2 \text{ 且 } \mu_{j-1}^* > \mu_0) \end{cases} \quad (7)$$

式中  $E$  为评判值的进化率,  $\mu_0^*$  为初始代的非劣等单元灵敏度控制系数,  $\beta$  为前一代的单元删除率,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别为预设的删除单元率下阈值和上阈值,通常可分别取 1% 和 2% [15]。当  $\beta$  超过上阈值时,在优化前期,设置控制  $\mu_j^*$  降低幅度的控制参数  $\mu_0$ , 通过比例参数  $n$  来对  $\mu_j^*$  实施自适应降低操作,

$n \in (0, 1)$ , 通常可取 0.5~0.8 [15]; 在优化后期,直接按  $\mu_1^*$  的幅度对  $\mu_j^*$  实施自适应降低操作。  $E, \mu_1^*$  和  $\mu_0$  的取值可以通过试算或根据经验选定。

(2) 性能指标。定义  $P$  和  $F$  作为优化结果的性能评价指标,

$$P = C_0 V_0 / C_i V_i, F = \omega_i / \omega_0 \quad (8,9)$$

式中  $C_0$  和  $V_0$  分别为初始总应变能和体积,  $C_i$  和  $V_i$  分别为第  $i$  次迭代后的总应变能和体积,  $\omega_i$  和  $\omega_0$  分别为当代和初始代的一阶固有频率。

$P$  值为结构静力优化性能指标,其值越大,表示结构静力刚度越高,即结构在给定荷载下的位移越小。优化过程中,出于对结构静力性能的基本要求,建议最优拓扑的  $P$  值保持在 0.9 以上。  $F$  为结构动力优化性能指标,其值越大,表示结构动力刚度越高,即结构的一阶固有频率越大。

(3) 优化终止条件。优化过程中,设定三个并行的优化终止条件,分别是结构的体积存留率下限值、 $P$  下限值以及  $\mu_j^*$  上限值,任一条件超出时,优化即终止。大多数情况下,优化终止由体积存留率条件控制,其中后两个条件的设置主要为了在优化中可能出现较大程度畸变或单元应变能分布已较为均匀时,及时终止优化。

### 2.4 优化流程

静动力双目标 ESO 的流程如图 1 所示。

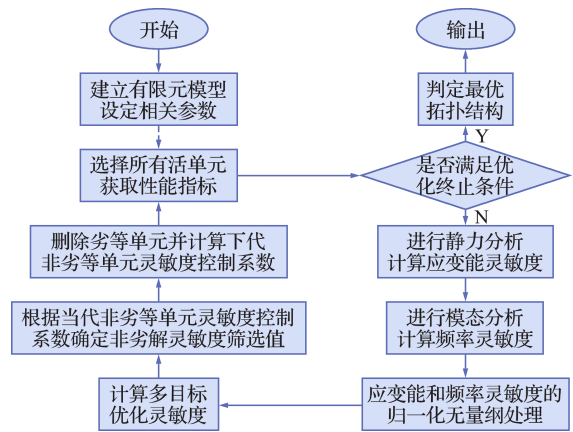


图 1 静动力双目标 ESO 流程

Fig. 1 Flowchart of static and dynamic bi-objective ESO

### 3 数值算例

两端固定铰支短梁,处于平面应力状态,厚度  $t = 50 \text{ mm}$ ,弹性模量  $E = 3.0 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,泊松比  $\nu = 0.2$ ,密度  $\rho = 7.9 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ ,跨中作用集中荷载,其余参数如图 2 所示。由于 ANSYS 平台既有良好的有限元分析能力,同时其 APDL 二

次语言开发功能又便于优化的程序编制和算法实现,因此,选择在 ANSYS 平台上完成算例的静动力双目标 ESO。

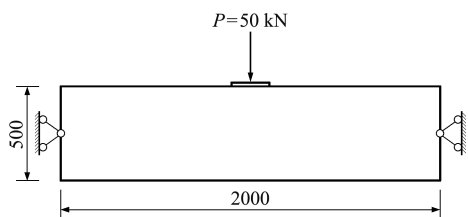


图 2 两端固定铰支短梁的优化设计域

Fig. 2 Design domain of short beam with a fixed hinge at both ends in optimization

选用 Plane42 单元建立有限元模型,取  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$ 。参考文献[15]的建议并结合试算,体积存留率下限值取 40%,  $\mu_i^*$  上限值取 0.1,  $E$  取 0.005,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别取 1% 和 2%,  $\mu_0$  取 0.6,  $n$  取 0.667。该算例的静动力双目标 ESO 过程如图 3 所示。

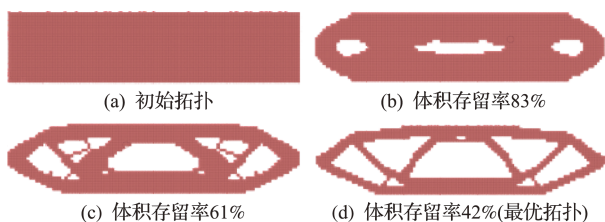


图 3 两端固定铰支短梁的静动力双目标 ESO

Fig. 3 Static and dynamic bi-objective ESO of the short beam with a fixed hinge at both ends

从图 3(d)可以看出,结构中部和两侧受力较小的部分逐渐删除,荷载由上部和中部的四根压杆向支座传力,使得结构在集中荷载下能保持较低水平变形,最优拓扑中  $P$  值相比初始拓扑小幅下降至 0.92;保留单元多集中在外围,最优拓扑中  $F$  值相比初始拓扑提升约 10%,表明该结果在保证结构静力刚度的同时,提升了一阶固有频率。

同法完成其他算例优化,如图 4 和图 5 所示,除图中标明的条件外,其余的设计、分析与优化参数均与固定铰支短梁算例相同。从图 4(b)和图 5(b)可以看出,这两个算例与两端固定铰支短梁算例有着类似的优化过程。由此,静动力双目标 ESO 的运行稳定性和普遍适用性均得到证实。

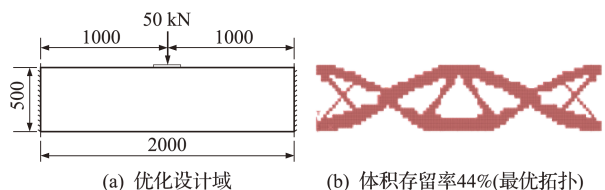


图 4 两端固支短梁的静动力双目标 ESO

Fig. 4 Static and dynamic bi-objective ESO of the short beam fixed along both ends

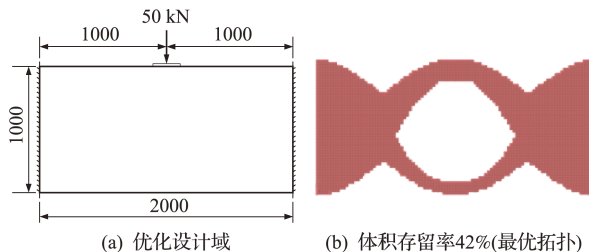


图 5 两端固支深梁的静动力双目标 ESO

Fig. 5 Static and dynamic bi-objective ESO of the deep beam fixed along both ends

### 4 权重系数与性能指标

表 1 列出了图 2 中两端固定铰支短梁算例在不同权重系数下的优化结果,体积存留率均为 42%。由表 1 可知,随着  $\omega_1$  降低和  $\omega_2$  上升,结构跨中腹部杆件数量不断减少,单元分布向外层聚集。根据平面 Michell 桁架的布局特征,当穿过某点的杆件是多对拉杆或压杆时,杆件应力是等值的,故结构中杆件越多,结构刚度越大<sup>[16]</sup>。因此,偏向静力优化时,结构中部将存留较多杆件。由于结构的质量与频率成反比,且截面面积、惯性矩与频率成正比,故偏向动力优化时,结构外层将存留更多单元。从静力作用下的安全性出发,静力优化权重系数一般不应小于 0.5,否则  $P$  值降至 0.9 以下,结构静力性能难以保证。

表 1 不同权重系数下的优化结果  
Tab. 1 Optimization results of different weight coefficients

优化类型	$\omega_1$	$\omega_2$	F 值	P 值	优化结果
静力单目标优化	1	0	1.03	1.16	
	0.7	0.3	1.05	1.07	
静动力双目标优化	0.5	0.5	1.10	0.92	
	0.3	0.7	1.12	0.66	
动力单目标优化	0	1	1.14	0.36	

图 4 和图 5 的算例中,两端固支短梁最优拓扑的  $F$  值与  $P$  值分别为 1.10 和 0.91,与两端固定铰支短梁基本相当;而固支深梁最优拓扑的  $F$  值与  $P$  值分别为 1.39 和 0.74,表明其虽然一阶固有频率提升较多,但其静力性能已处于较低水平,因此取  $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$  已不合理。出于对静力性能的保障,应适当调整权重系数,如取  $\omega_1 = 0.6 \sim 0.7$ ,  $\omega_2 = 0.3 \sim 0.4$ 。

### 5 有限元仿真分析

以图 2 所示的短梁为例,对初始拓扑结构、静力优化最优拓扑结构、动力优化最优拓扑结构以及静动力双目标 ESO 最优拓扑结构,先按照以下原则进行圆整化。(1) 按外包线圆整直杆;(2) 对小弧度的曲杆据结点位置与结点处截面外边连线进行直杆化处理;(3) 去除单元不连续的断杆;(4) 归并距离较近的结点。然后,在 ABAQUS 平台上,开展有限元对比仿真。几种拓扑结构的 Von-Mises 应力云图如图 6 所示;在跨中顶部 50 kN 集中荷载作用下的跨中最大位移、Von-Mises 应力平均值与标准差以及竖向振动一阶固有频率列入表 2。

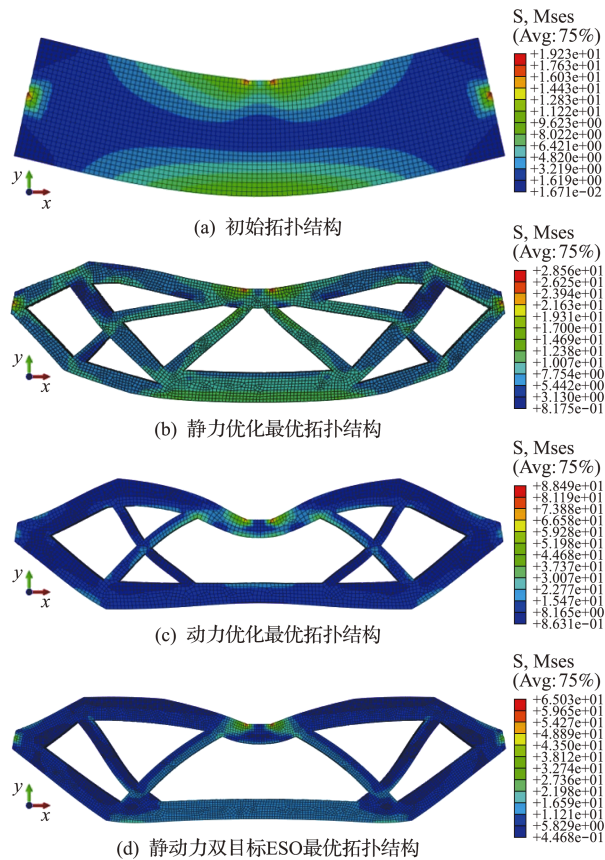


图 6 不同拓扑结构的 Von-Mises 应力云图(单位:MPa)  
Fig. 6 Von-Mises stress nephograms of different topological structures (unit: MPa)

从图 6 及表 2 的结果可以看出,(1) 初始拓扑结构变形最小,但所有单元的应力平均值远低于其他拓扑结构,变异系数为较高的 0.57,说明结构内整体应力水平较低且应力分布均匀性一般,材料利用不尽充分。同时,虽然其刚度最大,但其质量也最大,结果竖向振动一阶固有频率反而最小。以上两点都表明优化的必要性。(2) 静力优化最优拓扑结构,跨中最大位移较小,所有单元的应力平均

值较低,且变异系数最小,仅 0.31,说明其在静力刚度上和应力分布均匀性上的优势,对材料强度的利用较充分,但结构中腹杆数量较多,使其竖向振动一阶固有频率较低。(3) 动力优化最优拓扑结构与静力优化最优拓扑结构刚好相反,竖向振动的一阶固有频率最大,但其跨中最大位移达到静力优化最优拓扑结构的 2 倍以上,所有单元的应力平均值和标准差都相当高,变异系数也最大,达到 0.69,反映了其在静力性能上的缺陷。(4) 综合考虑静动力性能,静动力双目标 ESO 最优拓扑结构表现最佳。首先,其跨中最大位移仅高出静力优化最优拓扑结构 25%,单元应力平均值仅高出静力优化最优拓扑结构 11%,且变异系数相较于动力优化最优拓扑结构要小得多,表明其基本保持了静力刚度,整体上处于较均匀的较高应力水平,材料利用较充分;其次,其竖向振动的一阶固有频率仅低于动力优化最优拓扑结构 4.9%,表明其在动力性能方面的保持能力。(5) 优化基于的有限元分析和对拓扑结构的有限元仿真分别在 ANSYS 平台和 ABAQUS 平台上完成。经对比,在最优拓扑结构的竖向振动一阶固有频率上,静动力优化的结果为动力优化结果的 96.5%(ANSYS)和 95.0%(ABAQUS);在最优拓扑结构的整体抗弯刚度上,静动力优化的结果为静力优化结果的 79.3%(ANSYS)和 74.8%(ABAQUS)。可见,两个平台分析结果形成了相互佐证,差值可能与结构圆整化有关。

表 2 静动力性能参数

Tab. 2 Static and dynamic performance parameter

拓扑结构	在跨中顶部 50 kN 集中荷载作用下			竖向振动一阶固有频率/Hz
	跨中最大位移/mm	Von Mises 应力/MPa		
		平均值	标准差/(标准差/平均值)	
初始拓扑结构	0.0985	3.90	2.23	0.57
静力单目标优化最优拓扑结构	0.1650	7.95	2.43	0.31
动力单目标优化最优拓扑结构	0.3432	10.33	7.09	0.69
静动力双目标优化最优拓扑结构	0.2207	8.82	4.76	0.54

### 6 结论

(1) 将以刚度最大为单目标的静力优化的应变能灵敏度和以结构固有频率最大为单目标的动力优化的频率灵敏度,先进行归一化处理,再结合两者可

构建出静动力双目标优化灵敏度,作为静动力双目标 ESO 实现的基础。

(2) 在静动力双目标 ESO 中,静动力优化权重系数的相对大小,决定着最优拓扑解的力学特性,各取 0.5 时一般可获得静动力综合性能最佳的拓扑解。出于对结构的承载能力安全性能的考虑,建议静力权重系数不小于 0.5。

(3) 静动力双目标 ESO,兼顾结构静动力性能,使结构耗材减少但静力刚度基本维持,同时材料利用率 and 一阶固有频率不断提升。

## 参考文献(References):

- [1] 占金青,张宪民.连续体结构的静动态多目标拓扑优化方法研究[J].机械强度,2010,32(6):933-937. (ZHAN Jin-qing, ZHANG Xian-min. Research on static and dynamic multi-objective topology optimization of continuum structures [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2010, 32(6):933-937. (in Chinese))
- [2] 刘远东,尹益辉,郭中泽.连续体结构的多目标拓扑优化设计[J].机械科学与技术,2014,33(3):313-316. (LIU Yuan-dong, YIN Yi-hui, GUO Zhong-ze. Multi-objective optimization of topology of continuum structure [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2014, 33(3):313-316. (in Chinese))
- [3] 朱继宏,韦畅,侯杰,等.形状记忆合金结构拓扑优化设计方法研究[J].计算力学学报,2021,38(4):452-461. (ZHU Ji-hong, WEI Chang, HOU Jie, et al. A topology optimization method for shape memory alloy structures [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, 38(4):452-461. (in Chinese))
- [4] 张晓鹏,康柯,杨东生.基于相场描述的拉压不对称强度结构拓扑优化[J].计算力学学报,2020,37(6):670-676. (ZHANG Xiao-peng, KANG Ke, YANG Dong-sheng. Phase-field based topology optimization with Drucker-Prager yield stress constraints [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, 37(6):670-676. (in Chinese))
- [5] Michell A G M. The limits of economy of material in frame-structures [J]. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine*, 1904, 8(47):589-597.
- [6] Li Y, Xie Y M. Evolutionary topology optimization for structures made of multiple materials with different properties in tension and compression[J]. *Composite Structures*, 2021, 259(3):113497.
- [7] Li W C, Wang F W, Sigmund O, et al. Design of composite structures with programmable elastic responses under finite deformations[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2021, 151(4):104356.
- [8] Xia L, Xia Q, Huang X D, et al. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials: a comprehensive review [J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2018, 25(2):437-478.
- [9] 张望喜,黄星,刘霞.遗传递进演化算法配筋优化设计[J].计算力学学报,2017,34(3):303-311. (ZHANG Wang-xi, HUANG Xing, LIU Xia. Reinforcement layout optimization design using the genetic adding evolutionary structural optimization [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, 34(3):303-311. (in Chinese))
- [10] Xu B, Jiang J S, Xie Y M. Concurrent design of composite macrostructure and multi-phase material microstructure for minimum dynamic compliance [J]. *Composite Structures*, 2015, 128(9):221-233.
- [11] Ghaffarianjam H R, Abolbashari M H, Farshidianfar A. Quantitative verification of the morphing evolutionary structural optimization method for some benchmark problems using a new performance index [J]. *Scientia Iranica*, 2011, 18(3):383-392.
- [12] Lee H A, Park G J. Nonlinear dynamic response topology optimization using the equivalent static loads method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 283(1):956-970.
- [13] Yilmaz C, Kikuchi N. Analysis and design of passive band-stop filter-type vibration isolators for low-frequency applications [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 291(3-5):1004-1028.
- [14] 彭涛,田仲初,张建仁,等.基于多目标优化的混凝土斜拉桥静动力有限元模型修正[J].振动与冲击,2018,37(21):108-116. (PENG Tao, TIAN Zhong-chu, ZHANG Jian-ren, et al. Static and dynamic finite element model updating for a concrete cable-stayed bridge based on multi-objective optimization [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(21):108-116. (in Chinese))
- [15] 王磊佳,张鹤志,祝明桥.加窗渐进结构优化算法[J].应用力学学报,2018,35(5):1037-1044,1185. (WANG Lei-jia, ZHANG Hu-zhi, ZHU Ming-qiao. Windowed evolutionary structural optimization [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018, 35(5):1037-1044,1185. (in Chinese))
- [16] Hemp W S. *Optimum Structures*[M]. Oxford: Clarendon Press, 1973.

## Static and dynamic bi-objective Evolutionary Structural Optimization based on sensitivity of both strain energy and frequency

ZHANG Hu-zhi<sup>\*1,2</sup>, ZHANG Bang<sup>1</sup>, ZHOU Yun<sup>2</sup>, XIE Xian-zhong<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;

2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** At present, when evolutionary structural optimization (ESO) is applied, only a single static or dynamic goal is set, which is difficult to meet engineering needs for structural design. In this situation, based on dimensionless processing of the strain energy sensitivity and frequency sensitivity commonly used in single objective optimization, and combined with the multi-objective optimization theory, the static and dynamic bi-objective ESO was developed. Several deep flexural members with different boundary conditions are taken as numerical examples to prove the stability and universal applicability of the new method, and meanwhile obtain the value suggestion of the weight coefficient ratio between the static optimization and the dynamic optimization. The results of finite element comparative analysis show that the new method can take the static and dynamic performance of the structure into account. Compared with the traditional single objective optimization, it can reduce material consumption but basically maintain the static stiffness of the structure, and the material utilization rate and the first-order natural frequency are continuously improved.

**Key words:** ESO; bi-objective optimization; dynamic optimization; strain energy sensitivity; frequency sensitivity; topology optimization; structural optimization design

---

引用本文/Cite this paper:

张鹤志,张 棒,周 云,等.基于应变能与频率灵敏度的静动力双目标 ESO[J].计算力学学报,2023,40(2):192-197.

ZHANG Hu-zhi, ZHANG Bang, ZHOU Yun, et al. Static and dynamic bi-objective Evolutionary Structural Optimization based on sensitivity of both strain energy and frequency[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, 40(2):192-197.