

基于非接触式麦克风冲击共振测试的 钢-混组合结构界面脱空损伤识别方法研究

周云^{1,2,3}, 裴熠麟^{2,4}, 刘蒙^{2,5}

(1. 工程结构损伤诊断湖南省重点实验室, 湖南长沙 410082; 2. 湖南大学土木工程学院, 湖南长沙 410082; 3. 绿色先进土木工程材料及应用技术湖南省重点实验室, 湖南长沙 410082; 4. 湖南大学建筑安全与节能教育部重点实验室, 湖南长沙 410082; 5. 建筑安全与环境国际联合研究中心, 湖南长沙 410082)

摘要: 针对现有无损检测技术在钢-混组合结构界面混凝土脱空损伤识别问题上普遍存在的测试成本高、识别精度有限及操作过程复杂等不足之处, 提出了一种基于麦克风冲击共振测试的非接触式检测方法。首先, 基于四边约束矩形薄板振动理论, 将钢-混凝土板局部脱空处钢板简化为四边固支约束的板壳模型进行分析。通过在 ABAQUS 中建立考虑流-固耦合的钢-混凝土板有限元模型, 将模拟所得脱空处钢板自振频率值与理论解析结果进行对比, 证明该经验公式可有效适用于脱空区域处局部钢板自振频率的估计当中。其次, 依据相关声学理论研究成果, 利用所建立的有限元模型进行了外部激励下钢-混组合结构声压场信号分布特征研究, 结果表明设置及未设置脱空损伤的有限元模型所产生的声压响应存在明显不同, 且未脱空模型中信号响应具有幅值大、周期长等特征; 同时, 针对一钢-混凝土板设置了 8 种不同类型的损伤工况, 并利用麦克风传感器分别进行了基于冲击共振测试的脱空损伤识别。试验结果表明, 麦克风摆放位置对测试所得声压信号频响函数基本特征的影响程度并不显著; 且针对本试验所设置的损伤工况, 该方法基本均能实现有效识别, 但对平面尺寸在 60 mm 以下区域的测试效果并不明显。最后, 在对一特定损伤区域进行栅格化处理的基础上, 通过开展基于麦克风冲击共振法的损伤成像测试, 对该脱空区域的平面轮廓进行了有效识别。除此之外, 将试验测试效果分别与传统红外热像检测法、超声波探测法进行了对比分析, 验证了该麦克风冲击共振法能够较好地适用于钢-混组合结构的脱空损伤识别问题当中, 且具有非接触式、测试成本低、识别效果显著及操作便捷等优点。

关键词: 钢-混组合结构; 混凝土脱空损伤; 无损检测; 麦克风; 冲击共振; 非接触式

中图分类号: TU375.3

文献标志码: A

Non-contact diagnosis for interface debonding of steel-concrete composited structure by using impact resonance test with microphone

ZHOU Yun^{1,2,3}, PEI Yilin^{2,4}, LIU Meng^{2,5}

(1. Hunan Provincial Key Laboratory of Damage Detection, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China; 3. Hunan Provincial Key Laboratory of Green Advanced Civil Engineering Materials and Application Technology, Changsha 410082, China; 4. Key Laboratory of Building Safety and Energy Efficiency of the Ministry of Education, Changsha 410082, China; 5. National Center for International Research Collaboration in Building Safety and Environment, Changsha 410082, China)

Abstract: To distinguish the debonding defects of steel-concrete composited structure (SCCS), the existed non-de-

收稿日期: 2019-03-05; 修订日期: 2019-06-14

基金项目: 国家重点研发计划专项项目(2016YFC0701400, 2016YFC0701308); 湖南省重点研发计划项目(2017SK2220); 国家自然科学基金项目(51878264)

Supported by: National Key Research and Development Program of China (2016YFC0701400, 2016YFC0701308); Key Research and Development Program of Hunan Province (2017SK2220); National Natural Science Foundation of China (51878264)

作者简介: 周云(1979-), 男, 教授, 博士, 主要从事结构无损检测及健康监测方面研究. E-mail: zhouyun05@hnu.edu.cn

structive test (NDT) is generally thought with the problems of high tested costs, limited measurement accuracy, complicated operation process and etc. Therefore, this paper has introduced a non-contact NDT method by utilizing the impact resonance test with microphones. Firstly, the steel plate at the debonding defect of SCCS was treated as the clamped thin plate model based on the vibration theory, and the analytic value was validated by the finite element (FE) SCCS model with coupled fluid-solid consideration in ABAQUS program, showing that the empirical formula can be employed into the natural frequency predictions of this problem. Secondly, based on the theory of acoustic analysis, the FE model was utilized to research the distribution feature of acoustic waves under external excitations, and it was revealed that both of the type and transmission path of acoustic waves were significantly different between the debonding/non-debonding areas of the SCCS model, where the debonding signals were observed with the larger vibration amplitude and natural period. Meanwhile, the impact resonance test with microphone sensors was conducted for the SCCS with eight types of debonding defects. It was noticed that the basic characteristics of acoustic frequency response function (FRF) was not significantly influenced by the arrangement position of microphones, and the debonding defects can be well distinguished by the method except for the debonding defect with dimension less than 60 mm. Finally, the acoustic imaging analysis with microphones was conducted for a certain meshed debonding defect, and the outline of region can be roughly distinguished according to the test result. However, the experimental accuracy was dropped at the edge of debonding region, which can be improved with a denser mesh grid. Simultaneously, the test result was compared with the traditional infrared thermography method and the ultrasound method, and it was showed that the debonding defect of SCCS can be well distinguished by the impact resonance test with microphones, which has additionally employed the advantages of non-contact, lower costs, significantly precision and conventional operate process.

Key words: steel-concrete composited structure; debonding defect; non-destructive test; microphone; impact resonance test; non-contact test

引言

钢-混凝土组合结构具有承载力高、延性好、施工方便等特征,在大型桥梁结构及高层建筑中得以广泛使用^[1,2]。然而,受施工操作工艺、混凝土收缩徐变、荷载长期作用等因素影响,钢材内壁与混凝土粘结界面处可能会产生混凝土脱空剥离损伤,从而削弱整体结构的承载能力^[3]。因此,对钢-混组合结构脱空损伤进行有效检测成为了工程应用中的实际需求。

无损检测技术(non-destructive test, NDT) 是指在不影响整体结构或局部构件性能的前提下,通过测试特定物理量并用以进行状态判断的检测方法,现已被国内外众多学者及工程师应用至建筑结构的性能评估当中^[4]。然而,现有关于钢-混组合结构界面脱空损伤评估的无损检测技术发展并不成熟,主要包括冲击共振法、红外热像法、超声波法、光纤传感法及新型材料监测法等。张宏等^[5]利用超声波透射法对某钢管混凝土拱桥拱肋处的混凝土填充量进行了测试。刘清元等^[6]提出了适用于超声波检测法的钢-混凝土组合结构脱空损伤量化判别公式。丁睿等^[7]通过在某钢管混凝土带肋拱桥中布设光纤光栅传感器,对混凝土脱空损伤进行了有效识别及评估。Kweon 等^[8]利用冲击共振法对结构中混凝土的复数模量进行了测试。Lesicki 等^[9]采用冲击共振法对由于硅-碱反应造成的混凝土滑移损伤进行了光谱识别。Bodnar 等^[10]利用红外热像法实现了外部随机激励下的混凝土脱空损伤识别。许斌等^[11]通过在某钢-混组合结构中预埋压电陶瓷片,对外部激励下的响应信号进行了小波能量谱分析,从而实现了结构界面剥离损伤的识别。赵海亮等^[12]根据钢-混组合结构在外部激励下产生的加速度信号响应特征来判断构件界面处是否存在脱空损伤。Rachael^[13]等利用基于脉冲相位的红外热像法,实现了对不同脱空损伤类型的识别。杨金^[14]利用 Hilbert-Huang 变换对经冲击回波法测试所得钢-混组合结构的响应信号进行分析,有效识别了脱空损伤的区域及大小。朱亚林等^[15]通过应变片响应监测方法,对某大桥钢-混组合段产生的脱空区域进行了有效识别。

近年来,随着声学理论不断发展,空气耦合传感器(air-coupled sensor) 作为一种能够接受空气中声波信息的非接触式传感器,被逐渐应用至土木工程结构及材料的检测问题研究当中。根据被测试对象特性的

不同,声学传感器所感兴趣的频率响应范围可在 50 ~ 1 000 kHz 之间进行选取;对于钢-混组合结构而言,通常选用声压频率响应在 100 kHz 以下的传感器较为合适^[16]。其中,麦克风作为一种常见的空气耦合传感器,其频率响应范围通常在 0 ~ 35 kHz 之间,故可用于拾取钢-混组合结构泄露至空气中的低频声波;同时,由于其存在体积轻便、价格低廉等优点,现已被国内外众多学者应用至工程结构问题研究当中。Zhu 等^[17]利用麦克风对外部激励下混凝土结构泄露的声波信号组成成分进行了分析;Berriman 等^[18]利用麦克风对混凝土结构表面潮湿度进行了检测;Kee 等^[19]通过分析麦克风采集到的声压信号,对混凝土结构表面裂缝深度进行了分析;Shin 等^[20]提出可利用麦克风在无隔音装置的情况下进行冲击回波测试;Kim 等^[21]通过利用麦克风拾取混凝土结构表面泄露的瑞雷波,并对结构中混凝土材料的碳化损伤程度进行了评估。

针对现有无损检测技术对钢-混组合结构界面脱空损伤识别普遍存在的测试成本高昂、识别精度有限及实际操作过程复杂等不足之处,本文提出一种基于麦克风传感器的非接触式冲击共振测试方法。在对相关声学理论进行介绍的基础上,利用 ABAQUS 建立了考虑流-固耦合的钢-混凝土板有限元模型,并分别对外部激励下损伤及非损伤模型中的声压信号特征进行了分析。试验方面,对一设置有不同损伤类型的钢-混凝土板构件开展了基于麦克风传感器的冲击共振测试,并对该方法的识别效果进行分析;同时,对该试件开展了基于麦克风传感器的损伤成像测试,并与传统无损检测技术测试结果进行了对比分析。

1 薄板振动及声学模态理论

1.1 四边约束薄板振动理论

相关研究成果表明^[22],钢-混凝土组合结构的界面混凝土脱空剥离损伤可分为由浇筑不密实引起的球型间隙(spherical-cap gap)以及由混凝土自身收缩引起的环型间隙(circumferential gap)。损伤识别方面,有关学者通过将脱空构件转化为平面问题进行分析(如图 1 所示),并利用泡沫填充物对脱空情况进行模拟,研究出一系列钢-混凝土组合结构脱空损伤新型检测识别方法^[23-24]。本文基于该损伤设置方法,开展了相应研究工作。当钢-混组合结构在材料接触界面处发生混凝土脱空损伤时,损伤区域处的表面钢板即失去底部混凝土的支撑作用,而其损伤边界处的混凝土可理想假设为脱空区域钢板的支座。故基于平面薄板振动理论,通过对损伤区域钢板自振频率进行分析,从而为钢-混组合结构的脱空损伤识别提供相关理论支撑。

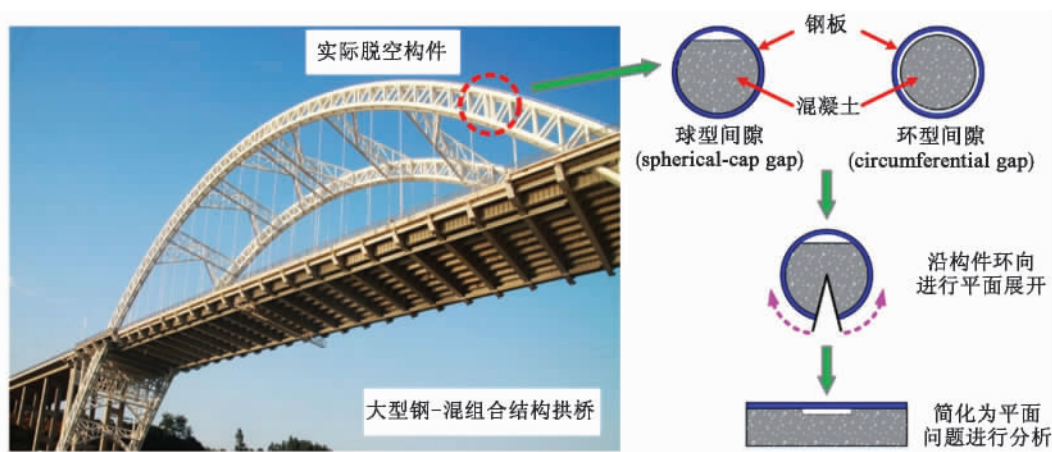


图 1 钢-混组合结构脱空损伤设置

Fig. 1 Handling for the actual debonding defect condition of steel-concrete composite structures

薄板振动理论研究方面,相关学者提出如下假设^[25]:(1)中性面假定。即当薄板发生弯曲变形时,中性面内各点只存在沿垂直方向的法向位移;(2)直法线假定。即变形前垂直于中性面的直线,在弯曲变形发生后依然与中性面保持垂直,且直线长度保持不变,板内中性面各点处的剪应变均为零;(3)无挤压假定。即薄板内各纤维层在变形发生后相互之间均不产生挤压变形,且垂直于中性面的应力应变分量均可忽略不计。基于上述假定,相关学者提出了考虑边界效应的四边简支约束薄板自振频率计算公式^[26]:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \quad (1)$$

其中, D 为薄板的弯曲刚度, ρ 为薄板的材料密度, h 为薄板的几何厚度, a' 和 b' 分别表示薄板所在边界处由最外侧阵型节线所包围矩形区域边长, m' 和 n' 分别表示该内部矩形简支板于所在方向的模态阶数。

四边约束信息未知的薄板振动模态难以用经典方法进行求解; 然而, 对于边长/板厚比值介于 5 ~ 80 之间的矩形薄板, 可基于四边简支约束模型, 通过边缘效应系数修正得到不同约束条件下的薄板振动模型^[27]。为准确地表达四边约束薄板的模态阵型情况, Mitchell 和 Hazell^[28] 等通过定义与薄板纵横向模态阶数 m 和 n 相对应的参数 Δ_m 及 Δ_n , 从而对约束薄板的边缘效应情况进行详细考虑:

$$\Delta_m = (a/\lambda_a) - m, \Delta_n = (b/\lambda_b) - n \quad (2)$$

其中, a 和 b 分别表示矩形薄板的几何边界长度, λ_a 和 λ_b 分别表示薄板在纵横向模态振型中的半波长。

因此, 式(1)中 m'/a' 及 n'/b' 可分别由相应边缘效应系数进行表达。经整理后的考虑边界效应的四边约束矩形板各阶自振频率计算公式如下:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left[\left(\frac{m + \Delta_m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n + \Delta_n}{b} \right)^2 \right]} \quad (3)$$

Mitchell 和 Hazell^[28] 通过开展系列试验, 最终认为四边约束薄板的边缘效应系数是与一系列结构无量纲模态参数 (na/mb 及 mb/na) 相关的功能函数, 即:

$$\Delta_m = ((na/mb)^2 + c)^{-1}, \Delta_n = ((mb/na)^2 + c)^{-1} \quad (4)$$

其中, $1/c$ 为边界效应系数的数值上界, 其数值大小取决于矩形薄板的几何边界条件。通常情况下, 将经验系数 c 取值大小设定为 2。

相关研究成果表明, 当脱空损伤的平面尺寸远大于其纵向深度时, 损伤区域处的局部钢板可近似视为四边完全约束的矩形薄板^[26]; 且其自振频率估算可按照式(3)、式(4)进行求解(经验系数 c 取值为 2)。

1.2 声学模态理论

根据相关声学理论可知, 当对处于流-固耦合空间内的结构表面施加脉冲激励后, 将在固体内部产生首波(head wave)、横波(S wave)及纵波(P wave), 而在流体内部产生直接声波(fluid acoustic wave)及泄露瑞雷波(leaky Rayleigh wave), 同时在流-固耦合表面处产生界面波(scholte wave)^[29]。

实际工程中, 可通过频率响应函数测试方法, 通过对系统施加外部激励并测试其特征响应, 从而根据输入-输出关系实现对系统动态特性的认识。在声学模态理论中, 声压频响函数可表达为^[30]:

$$H_{mn}^p(\omega) = \frac{p_m(\omega)}{F_n(\omega)} = \frac{\int_s \frac{j\omega\rho_0 v_n}{2\pi R} e^{-jkR} dS}{F_n(\omega)} = \int_s \frac{j\omega\rho_0 e^{-jkR}}{2\pi R} H_{in}^e(\omega) dS \quad (5)$$

其中, $H_{mn}^p(\omega)$ 为第 n 点输入及第 m 点输出情况下所获得的声压频响函数; j 为单位复数, ω 为声波圆频率, ρ_0 为流体介质密度, v_n 为声源的振动速度, R 为声源距测点之间的直线距离, k 为声波传递常数, S 为声源在垂直于声波传播方向的投影面积, $H_{in}^e(\omega)$ 为在 n 处进行激励时结构内各振动元振动速度的频响函数。

由模态理论可知, 结构振动响应的速度模态可转化为相应位移模态表达式, 且声压频响函数为各阶模态的分量之和。实际工程应用中, 若激励点与信号拾取点之间距离保持不变时, 则结构响应的频响函数将维持在某一特定值。除此之外, 由于板壳结构的系统阻尼通常较小, 因而各阶模态之间的耦合作用可忽略不计, 故可进行解耦处理。模态柔度计算方面, 由于位移模态测试过程中的频响函数矩阵为对称矩阵, 其反映了外部特征激励与结构位移响应之间的函数传递关系; 而声学模态测试过程中的频响函数为非对称矩阵, 综合反映了包含结构位移阵型、所产生声压场特征等信息。故定义声压模态柔度概念如下:

$$H_{mn}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{\Psi_{mr} \Psi_{mr}}{M_{Ar}(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\Psi_{mr}^* \Psi_{mr}^*}{M_{Ar}^*(j\omega - \lambda_r^*)} \right] \quad (6)$$

其中, N 为总模态阶数, Ψ_{mr} 为第 r 阶模态的模态阵型系数, M_{Ar} 为第 r 阶模态的模态质量系数, λ_r 表示第 r 阶极点, * 表示复数共轭。

2 流-固耦合空间声场分布数值模拟

2.1 有限元建模

为验证钢-混组合结构在外部激励下的声波传递路径, 利用 ABAQUS 分别建立了设置及未设置脱空损

伤的钢-混凝土板有限元模型,如图 2 所示。其中混凝土及钢板构件均采用实体单元 C3D8R 进行建模,构件的平面几何尺寸均为 600 mm × 600 mm;混凝土厚度设置为 120 mm,钢板厚度设置为 6 mm。为观察声波在流体中的传递情况,对于外部环境场采用实体单元 AC3D8R 进行模拟。其中声介质密度设置为 1.2 kg/m³,相应体积模量设为 1.4 × 10⁵ N/m²。针对存在脱空损伤的试件,在其混凝土构件表面几何中心处设置有平面尺寸为 200 mm × 350 mm、厚度为 10 mm 的矩形凹陷用以模拟脱空损伤。接触设置方面,未脱空区域处混凝土与上部钢板之间设置为绑定约束,脱空区域处钢板与混凝土之间未设置接触与约束;钢板与外部环境场之间则设置为绑定约束。构件底面设置为固支边界约束。同时,在钢板与空气的流-固耦合交界面处,设置声导纳参数为 1.28 × 10⁻⁸ + 2 × 10⁻⁵i^[31]。网格划分方面,混凝土构件的网格尺寸划分为 5 mm,钢板构件为 2 mm;为提高计算效率,流体部分网格尺寸沿竖向高度由 2 mm 逐渐变至 5 mm。

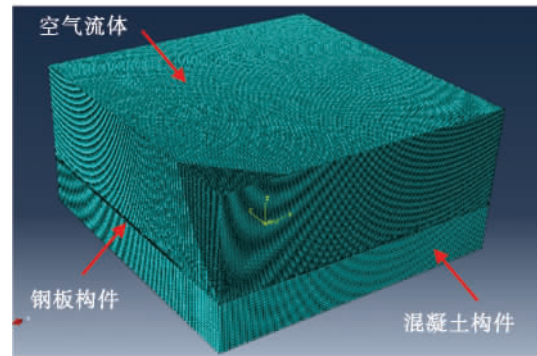


图 2 流-固耦合有限元模型

Fig.2 Finite element model with coupled fluid-solid consideration

2.2 脱空区域钢板自振频率求解

当钢-混组合结构发生界面脱空损伤时,通常情况下损伤区域的平面几何尺寸远大于其损伤深度。同时,由于钢板厚度远小于相应损伤区域的几何面积,且构件产生的剪切变形可忽略不计,因此拟将损伤区域处的局部钢板简化为四边约束薄板问题进行分析。

通过在 ABAQUS 中定义分析步及迭代次数,对该钢-混凝土板的矩形损伤区域进行模态分析,并提取其前 3 阶频率响应值,如表 1 所示。同时,依据式(3)中所述板壳振动理论,对该类型四边约束矩形薄板的自振频率进行求解。其中,局部钢板平面几何尺寸 $a = 350$ mm, $b = 200$ mm,钢板厚度 $h = 6$ mm,材料密度 $\rho = 7800$ kg/m³。薄板的弯曲刚度由 $D = (Eh^3) / (12(1 - \nu^2))$ 计算求得,其中材料弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}$ N/m²,泊松比 $\nu = 0.3$ 。所求得的结构前 3 阶自振频率解析值如表 1 所示。易知模拟计算结果与理论解析值较为接近,从而验证了四边约束矩形薄板振动理论可近似应用于存在界面混凝土脱空损伤的钢-混组合结构自振频率问题估计当中。

表 1 脱空损伤处局部钢板自振频率

Table 1 Natural frequency of local steel plate at the debonding defect area

模态阶数	m	n	Δ_m	Δ_n	理论值(Hz)	模拟值(Hz)
1	1	1	0.197 5	0.429 8	907.20	905.65
2	2	1	0.361 6	0.302 5	1 270.00	1 280.60
3	3	1	0.427 3	0.202 5	1 906.90	1 998.50

2.3 声场分布规律

针对所建立的流-固耦合有限元模型,分别在构件表面施加正弦荷载进行显示动力学分析,并观测自激励施加后至 1ms 内声压场在流体空间的分布情况,如图 3 所示。易知在外部脉冲激励作用下,未脱空的钢-

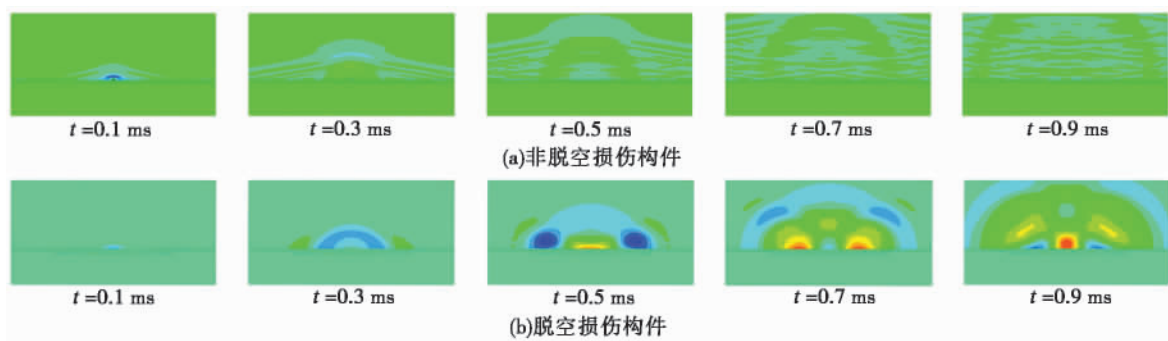


图 3 脉冲激励下钢-混凝土板声压分布情况

Fig.3 Acoustic signals distributed condition of steel-concrete composited plate under impulse excitation

混凝土板将在周围环境中激起呈半球形分布的直接声波及呈辐射状分布的泄露瑞雷波,其中沿流-固界面扩散的泄露瑞雷波传播速度较在空气中传播的直接声波要快。而对存在脱空损伤的构件,其构件表面上部将产生由局部脱空板壳持续振动引起的声波信号,其幅值及响应周期均远大于对应无损构件处的声压响应。因此,通过开展基于显示动力分析的流-固耦合空间声压分布规律数值模拟研究,验证了利用声压信号进行钢-混组合结构界面脱空损伤识别的可行性。

3 钢-混凝土板脱空损伤识别试验

3.1 构件设计

为研究存在脱空损伤的钢-混组合结构发生冲击共振时的信号响应特征,设计了一平面尺寸为 550 mm × 900 mm 的钢-混凝土板构件进行试验探究,如图 4 所示。其中钢板强度等级为 Q235,混凝土强度等级为 C30,构造钢筋强度等级为 HRB335; 钢板厚度设置为 6 mm,混凝土厚度为 120 mm。在钢板与混凝土交界面处,利用粘结剂将 8 种不同形状及尺寸的珍珠棉塑料泡沫板固定于钢板内表面,以模拟实际结构中所产生的不同规格的混凝土脱空损伤。其中,除 B_p 区域处损伤厚度为 15 mm 外,其余区域损伤厚度均设置为 10 mm。除此之外,为防止构件因混凝土收缩徐变而产生脱黏现象,在构件钢板内侧焊接有直径为 13 mm、长度为 40 mm 的栓钉群以进行锚固处理。

仪器设备方面,采用 PCB 公司的 208A3 型力锤及传感器(灵敏度: 2.247mV/V) 进行冲击激励及力信号记录,其中力锤采用钢制锤头进行敲击测试; 利用 B&K 公司的 4958A 型麦克风(1/4 英寸,量程: 0 ~ 20 kHz) 进行声压信号采集。由于声学传感器的灵敏度易受周围环境温湿度影响,故每次测试前均采用 B&K 公司的 4231 型标准声源(1 000 Hz) 进行灵敏度现场标定。同时,利用 LMS 动态信号分析仪进行数据采集及存储,并利用 LMS-Testlab 及 Matlab 操作平台对测试所得数据信号进行分析处理。试验过程中,通过在待测钢-混构件表面选取测试区域,利用外接钢支架将麦克风固定于测点上方。对整体激励及采集系统装置进行调试,如图 5 所示。

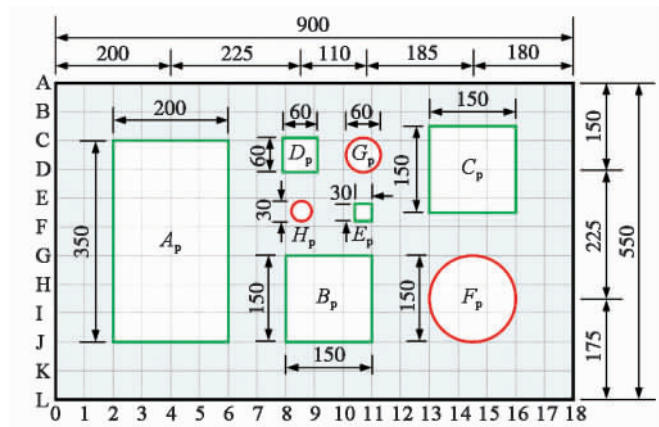


图 4 构件脱空损伤设置

Fig. 4 Arrangement of debonding defect region (mm)

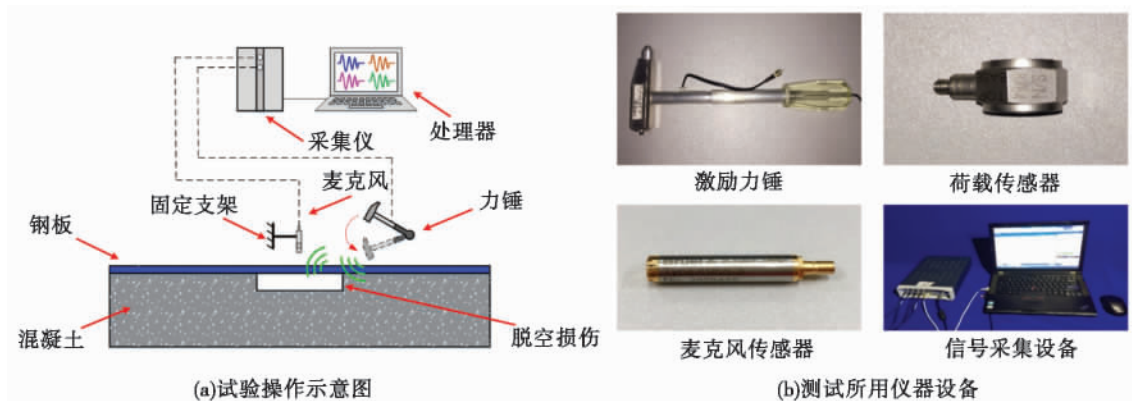


图 5 试验测试概况

Fig. 5 Diagram of experimental test condition

3.2 测试步骤

试验过程中,依次选取不同损伤区域进行多次敲击激励测试。其中,信号采样频率设置为 51.2 kHz,带宽为 25.6 kHz; 采样时间长度设置为 0.1 s,相应谱线数为 16 384。对于不同测试工况,其麦克风距构件表面

竖直高度及距激励点水平距离应保持一致,且每次敲击完成并静置 1~2 min 后再进行下一工况测试。对采集到各敲击点处的声压信号做频响函数处理,具体实施步骤如下:

(1) 每次敲击及采样完成后,检查相应声压信号数据质量,剔除因测试操作不当而产生的异常数据;

(2) 从采集到的声压信号中截取部分进行信号预处理。本试验过程中选取自力锤敲击后至 0.1 s 内的激励及声压信号进行分析,并对所截取的响应信号添加矩形窗进行处理;

(3) 对预处理后的激励信号及声压信号分别做快速傅里叶变换(fast Fourier transformation, FFT),将所得时域信号转为相应频域信号;

(4) 将处理后多个频域信号进行平均处理,减少因周围环境噪声等随机因素对测试信号造成的干扰影响;

(5) 分别计算声压信号的自功率谱 G_{pp} 、激励信号的自功率谱 G_{ff} 、声压信号与激励信号的互功率谱 G_{pf} 及其相干函数,推导得到测试构件的频率响应函数。其中,频响函数的估计方法分为 H_1 、 H_2 和 H_V 三种,需根据输入及输出信号的噪声情况选择合适的方法。本试验过程中选用 H_1 方法进行信号处理。

3.3 典型声压信号

为探究钢-混组合结构脱空与非脱空处的典型声压信号特征,选取 200 mm × 350 mm 矩形损伤区域进行试验测试。利用力锤分别在该区域几何中心及脱空区域外密实点处进行敲击激励,并将麦克风置于敲击点正上方约 20 mm 处进行声压信号采集。将测试所得的时域声压信号分别与相应激励信号幅值进行相除,并经归一化处理,即可得到脉冲激励下脱空及非脱空区域处的构件典型声压信号,如图 6 所示。易知在外部脉冲激励作用下,钢-混凝土板非脱空处声压信号的幅值及响应持续时间均远小于相应脱空区域处的响应。因此,可利用声压信号的差异来判断敲击点处是否存在脱空损伤。

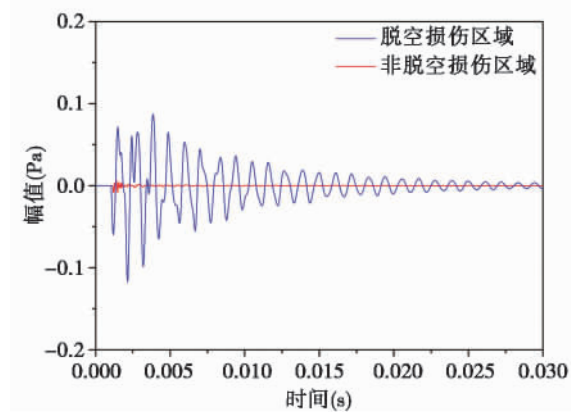


图 6 脉冲激励下声压时域信号

Fig. 6 Acoustic signals in time domain under impulse excitation

3.4 采集位置影响

根据声学理论可知,体积声源所产生的功率只有部分可转化为结构的振动响应;且依据振动-声互异性原理可知,结构表面在外部激励下所产生的声功率也只有部分被转化为声压响应。其中,转化效率 β 与激励点及采集点的相对位置有关^[32]。

为研究声学传感器不同摆放位置对测试所得声压信号的影响程度,试验过程中对麦克风测点的竖直高度、水平距离及倾斜角度分别进行了研究。通过选取 200 mm × 350 mm 矩形损伤区域,敲击其几何中心进行试验测试。其中,竖直高度影响研究方面,将麦克风依次置于距敲击点上方 5 mm、10 mm、15 mm、20 mm、30 mm、40 mm、50 mm 及 60 mm 处进行信号采集;水平距离影响研究方面,将麦克风距敲击点的竖直高度保持为 40 mm,水平距离则依次设置为 25 mm、50 mm、75 mm、100 mm 及 125 mm;倾斜角度影响研究方面,将麦克风置于 40 mm 上方高度处,倾斜角度依次设置与构件表面呈 0°、45° 和 90° 夹角。将各工况下测试所得的声压信号及其激励信号分别做自功率谱及互功率谱,从而得到相应频响函数,如图 7 所示。

根据测试结果可知,在 0~60 mm 测试高度范围内,计算所得的声压信号频响函数分别在 900 Hz、1 200 Hz 及 1 900 Hz 处表现出明显峰值特征;同时,随着测试高度的增大,相应频响函数峰值大致呈现出随之降低的趋势。水平距离影响方面,在 0~125 mm 测试范围内,相应声压信号频响函数分别在 1 900 Hz 及 3 900 Hz 处产生峰值特征,且信号峰值大致随水平距离的增大而逐渐减小。值得注意的是,当距敲击点的水平距离达至 100 mm 及 125 mm 时,相应麦克风已分别处于脱空区域边缘及非脱空区域上方,但峰值声压信号所对应的频率响应仍为 1 900 Hz 及 3 900 Hz。倾斜角度影响方面,可见在 0°~90° 测试范围内,声压信号频响函数分别在 900 Hz、1 200 Hz 及 1 950 Hz 处产生峰值,且各工况所对应的信号幅值大小差别并不显著。因此,可得出结论:同一测点下不同麦克风摆放位置并不影响相应声压信号频响函数的基本特征;且麦克风

距测点的竖直高度及水平距离越近,其相应声压信号的响应幅值则越大、辨识效果越明显;同时,麦克风摆放倾斜角度对测试结果的影响并不明显。

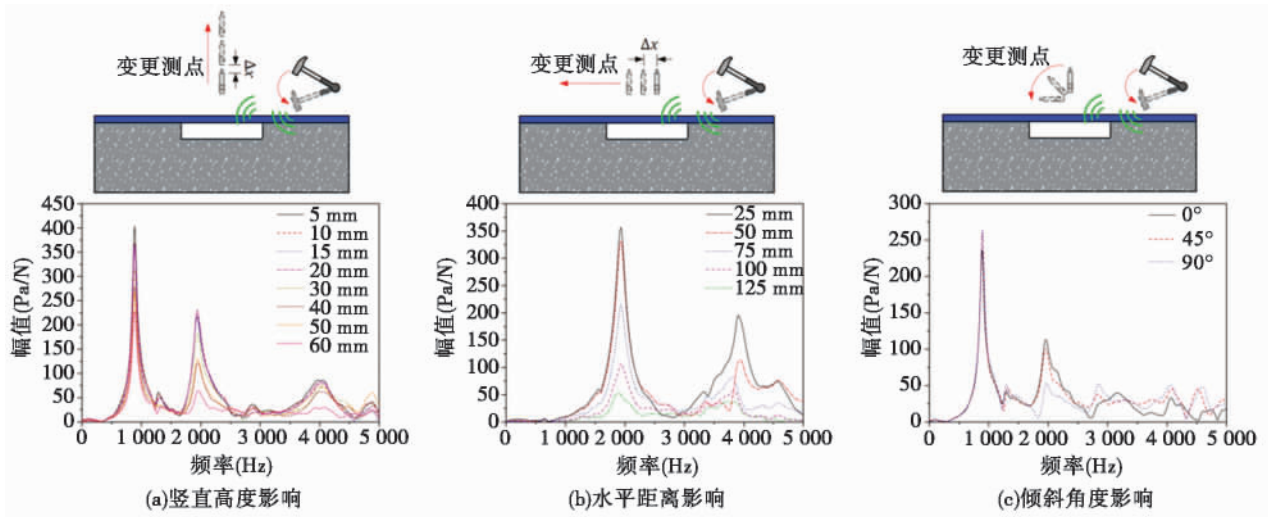


图7 不同麦克风摆放位置下声压频响函数

Fig. 7 Acoustic FRF under different microphone arranged positions

4 非接触式麦克风无损检测方法

4.1 冲击共振测试

在明确相关因素对试验测试结果的影响程度后,为进一步探究损伤区域规格形状对声压频响函数的影响,对该钢-混凝土板中8种损伤工况依次进行了基于麦克风的冲击共振测试。试验过程中,将麦克风固定于距测点上空约5 mm处,采样频率及带宽等相关设置均与前述操作保持一致。通过按照一定敲击规则,对各损伤区域依次进行激励测试,并对测试所得的声压信号做相应频响函数,结果如图8所示;各工况下所识别的峰值声压信号的频率值汇总如表2所示。易知同一测区内脱空及非脱空处峰值信号所对应的频率值存在明显不同。同时,通过对比不同规格损伤区域处的声压频响函数,可知局部板壳振动的一阶频率随损伤尺寸的增大而减小;同时对规格相同的矩形及圆形损伤区域测试结果可知,圆形损伤处由冲击共振产生的频响函数响应幅值略大于相应矩形损伤区域信号响应。

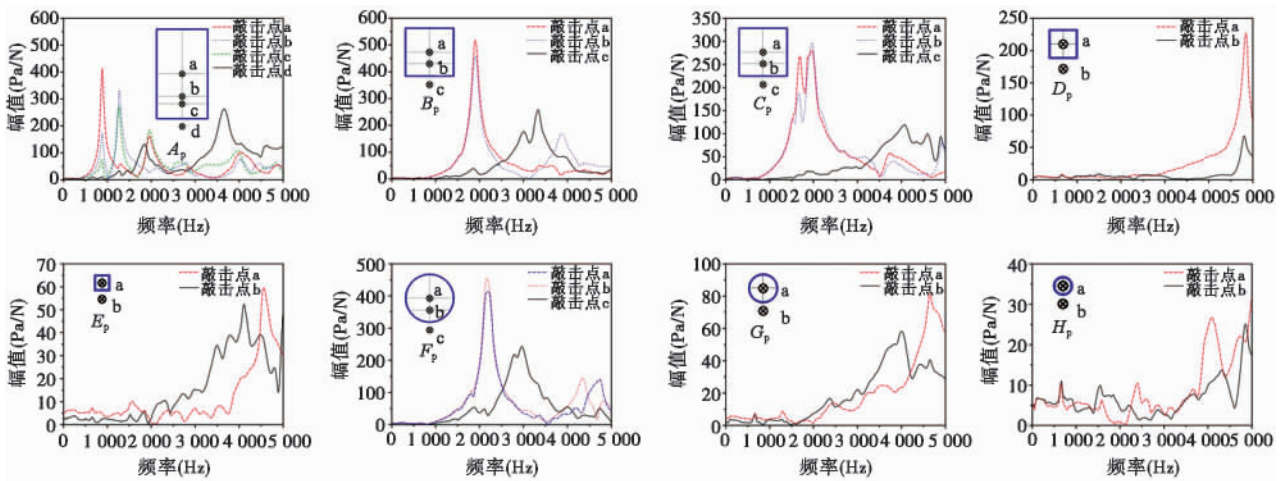


图8 麦克风冲击共振测试结果

Fig. 8 Results of impact resonance tests with microphone

根据试验测试结果可知,在对不同规格及形状的脱空损伤区域进行基于麦克风传感器的冲击共振测试时,由测试声压响应信号计算所得的频响函数基本能较好地识别局部板壳的低阶振动频率。当敲击点作用于非脱空损伤区域时,麦克风测试所得的声压频响函数幅值远小于相应脱空区域处响应。可据此粗略判断激励处是否存在脱空损伤。针对本试验所设计的测试构件,该方法适用于对平面几何尺寸大于 150 mm 的损伤区域进行识别;当损伤尺寸小于 60 mm 时,由于冲击力锤无法激励出局部板壳的振动模态,从而无法对其进行有效识别。因此,利用基于麦克风的冲击共振测试可实现钢-混组合结构的界面脱空损伤识别,但对损伤区域的平面规格尺寸存在一定适用性。

4.2 损伤成像测试

实际工程应用中,由于钢-混组合结构脱空损伤所产生的位置通常无法预知,故依据力锤单点激励所得的声压频响函数将难以判断该处是否存在局部脱空损伤。但当对一固定区域进行网格化处理,并对各结点进行均匀多次激励后,可通过对比各处的声压频响函数特征来实现脱空损伤识别。若测试处存在脱空损伤,则测试区域内各点将呈现出信号峰值所处频率相同、但响应幅值不同的规律;若测试处不存在脱空损伤,则各点将呈现出响应幅值及所对应频率值均不相同的规律。在此基础上,通过引入声压模态柔度概念,将基于麦克风阵列方式所测得的各点信号响应以模态柔度值形式表示,从而实现未知情况下的钢-混组合结构界面脱空损伤识别。

表 2 脱空损伤区域峰值频率值

Table 2 Peak frequency of debonding defect region

测试工况	敲击测点	峰值信号频率 (Hz)
A_p	1/2, 1/4, 1/6 点	880, 1 270, 1 950
B_p	1/2, 1/4 点	1 950
C_p	1/2, 1/4 点	1 600 ~ 2 200
D_p	1/2 点	-
E_p	1/2 点	-
F_p	1/2, 1/4 点	2 160
G_p	1/2 点	-
H_p	1/2 点	-

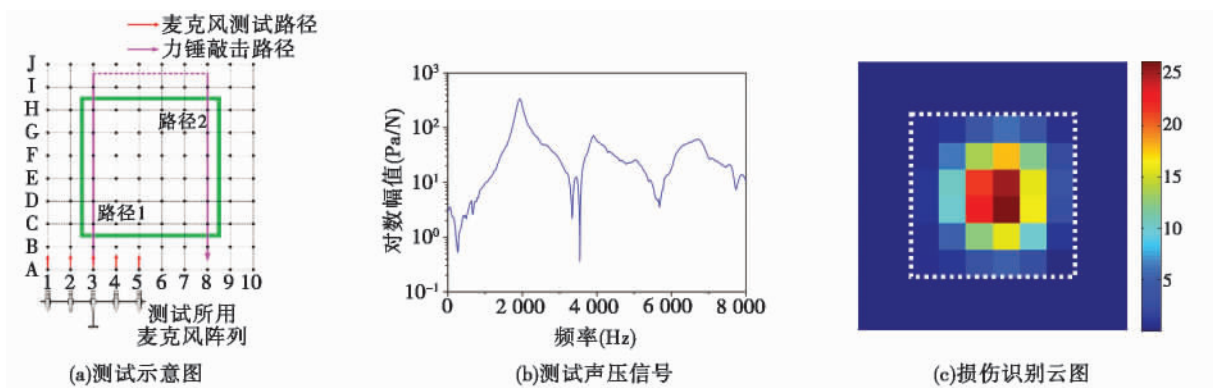


图 9 麦克风损伤成像测试

Fig. 9 Damage imaging analysis with microphone

试验过程中,选取该钢-混凝土板的 150 mm × 150 mm、厚度为 15 mm 的矩形损伤区域进行试验测试,通过在钢板表面划分以损伤区域为中心、间隔为 25 mm 的 10 × 10 网格矩阵,将 5 个麦克风传感器沿水平方向并排成一行,并置于网格线各行结点上方约 50 mm 处。试验过程中,利用力锤依次敲击各网格结点,通过麦克风拾取每次激励时敲击点正上方处的声压信号,并与相应力信号作频响函数处理。为保证测试精度及操作效率,试验过程中首先完成沿路径 1 方向的测试后,再进行沿路径 2 方向的测试,如图 9 所示。提取各频响函数中的声压模态柔度值,汇总如表 3 所示。

根据试验测试结果,易知损伤区域内部边缘处的声压模态柔度值约在 1 ~ 10 Pa/N 范围之间,且中央核心区区域处已达至 10 ~ 30 Pa/N;而损伤区域外构件非脱空处的声压模态柔度值则主要介于 0 ~ 0.3 Pa/N 之间。该现象表明由于局部板壳振动,导致钢-混组合结构界面脱空区域处的声压模态柔度远大于非脱空区域处响应。将测试所得各点声压模态柔度值按照网格划分方式依次填充至特定矩阵中,做出该测试区域的损伤识别云图,如图 9(c) 所示,其中白色虚线框表示预设的矩形脱空损伤区域。该结果直观表明了基于麦克风的冲击共振测试能够较好地识别钢-混组合结构界面脱空损伤区域。但在损伤及非损伤区域交

界边缘处,该测试方法识别效果的精确性受到一定影响;可通过细化敲击网格密度等方式加以改进。

表3 声压模态柔度值

栅格结点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0.258	0.298	0.284	0.249	0.227	0.195	0.131	0.268	0.272	0.230
B	0.254	0.326	0.266	0.264	0.203	0.239	0.151	0.287	0.241	0.183
C	0.187	0.264	0.321	1.078	3.289	5.129	2.553	0.248	0.221	0.115
D	0.229	0.265	0.321	5.206	12.523	15.664	9.994	1.010	0.212	0.246
E	0.192	0.248	0.315	10.056	22.716	26.142	16.257	2.855	0.241	0.263
F	0.198	0.224	0.284	10.276	21.305	25.221	15.853	3.631	0.190	0.188
G	0.157	0.080	0.235	6.475	13.684	17.617	12.189	2.449	0.208	0.251
H	0.145	0.439	0.304	1.224	3.964	5.908	3.858	0.519	0.247	0.255
I	0.188	0.201	0.334	0.285	0.241	0.245	0.272	0.218	0.226	0.244
J	0.170	0.257	0.272	0.356	0.298	0.224	0.250	0.190	0.278	0.343

5 其他无损检测技术对比

5.1 红外热像法

实际工程中,若构件表面温度场发生变化,内部材料可通过吸收表面热能并进行传导。当构件内部存在脱空损伤时,脱空及非脱空部位处的材料热传导性能存在差异,从而使表面温度场分布呈现差异。可利用红外热像法观测构件表面温度场分布特征,从而对结构脱空损伤情况进行识别。

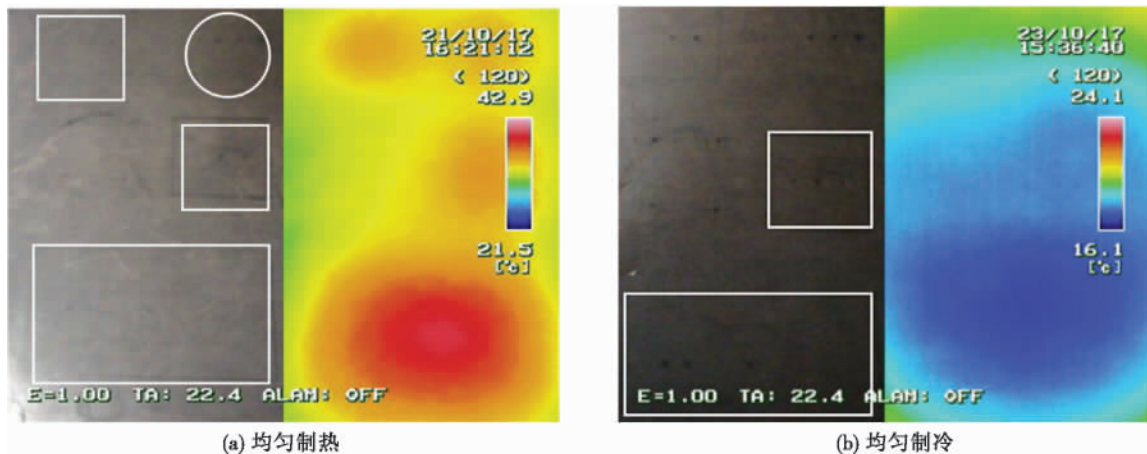


图10 红外热像法测试结果

Fig. 10 Results of infrared thermography test

为对比验证该麦克风检测方法的测试效率及识别精度,利用红外热像法对该钢-混凝土板脱空损伤进行检测。在使用电加热器对试件钢板表面均匀加热约 20 min 后,采用 NEC 型红外热像仪(波长范围: 8 ~ 14 μm ,有效像素: 320H \times 240V,精度: $\pm 2\%$)对构件表面温度场分布情况进行测试,结果如图 10(a)所示。易知在外部热源作用下,几何长度在 150 mm 以上的损伤区域处产生了局部高温,但尺寸在 60 mm 以下区域处识别效果并不明显。为探究制冷条件下该方法的辨识效果,在利用制冷剂对构件表面均匀制冷约 20 min 后进行测试,如图 10(b)所示。其中 200 mm \times 350 mm 及 150 mm \times 150 mm 矩形脱空损伤区域处的平均温度均低于未设置损伤处构件温度,但其余脱空区域处的低温特征并不明显。由此可得出结论,使用红外热像法可实现对该钢-混组合构件的脱空损伤识别,且加热状态下的识别效果较制冷条件下要好;但该方法同样对损伤区域的规格尺寸具有一定适用性要求,同时在实际工程操作过程中对结构构件实现均匀加热(制冷)也存在一定技术困难。

5.2 超声探测法

在使用超声探测法进行损伤识别时,主要利用了超声波在不同介质中传播时将产生不同的回波特性。

超声波经紧贴于构件表面的超声探头发射后,通过涂抹在构件表面的耦合剂导入至构件内部;当在传递过程中遇到不同介质(如脱空损伤、构件底部)时,超声波将反射至仪器探头处。通过变换测点、对比测试所得的信号特征,即可实现对损伤区域及深度的判断识别。

为对比验证该麦克风检测方法的测试效率及识别精度,利用超声探测法对该钢-混凝土板脱空损伤进行检测。由于超声探伤法所需工作量较大,故选取厚度为 15 mm 的 150 mm × 150 mm 矩形损伤区域进行测试,其中测点网格划分方式与前述麦克风损伤成像测试保持一致。试验过程中利用凡士林耦合剂将 ZBL 超声波探头固定于构件钢板表面处,并利用 HS 型超声波探伤仪,配合 2.5 MHz 发射频率依次进行测试。将试验所得各测点处的信号回波深度绘制成损伤云图,如图 11 所示。根据测试结果可知,使用超声探测法对该脱空损伤区域的识别效果较为模糊,且各测点处所测得的超声回波深度均介于 4.3 ~ 4.6 mm 之间。由于该类型超声探头存在 1 ~ 2 mm 的测试盲区,故各测点所测试的实际探伤深度约为 6 mm 左右,与试件钢板厚度较为接近,表明试验过程中的超声波反射深度基本未穿透钢板边界。因此,使用超声探测法对该钢-混凝土板进行脱空损伤识别的测试效果并不理想;同时,该方法对仪器设备、试件钢板厚度等均存在一定适用条件,且试验过程中在各测点处涂抹黏贴耦合剂等操作过程也较为繁琐复杂。

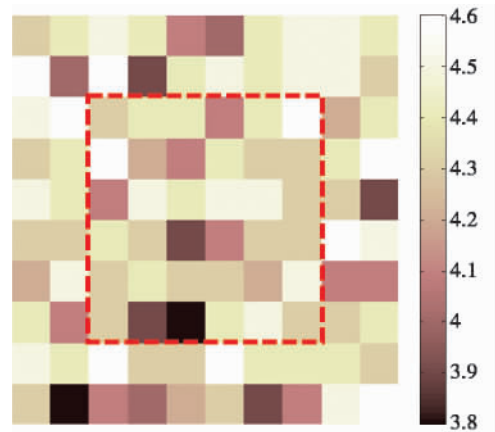


图 11 超声探测法脱空区域损伤云图
Fig. 11 Results of ultrasound imaging test

因此,使用超声探测法对该钢-混凝土板进行脱空损伤识别的测试效果并不理想;同时,该方法对仪器设备、试件钢板厚度等均存在一定适用条件,且试验过程中在各测点处涂抹黏贴耦合剂等操作过程也较为繁琐复杂。

6 结论

针对现有无损检测技术对钢-混组合结构界面脱空损伤识别所存在的测试成本高、辨识精度有限及操作过程复杂等不足之处,提出了一种新型基于麦克风冲击共振测试的非接触式检测方法。在对相关声学理论进行讨论的基础上,利用 ABAQUS 建立了考虑流-固耦合的钢-混凝土板有限元模型,并对外部激励下的声场分布特征进行了分析。同时,对设置有不同损伤类型的钢-混凝土板分别进行了基于麦克风的冲击共振测试及损伤成像测试,并与传统无损检测技术测试效果进行对比验证。主要结论如下:

(1) 对声学模态理论进行分析,为基于麦克风冲击共振测试的钢-混组合结构脱空损伤识别方法提供理论基础。同时,基于四边约束薄板振动理论,利用数值模拟方法验证了该理论可近似适用于钢-混凝土板矩形脱空损伤区域处局部钢板的自振频率估计当中。除此之外,依据有限元模拟结果可知,脱空及非脱空结构在外部激励下所产生的声波特征及传递路径均存在明显不同,且脱空构件中的声压信号与非脱空构件相比具有幅值大、周期长等特征。

(2) 对该钢-混凝土板进行了基于麦克风传感器的冲击共振测试。对可能影响试验效果的麦克风摆放高度、水平距离及倾斜角度依次进行了分析,结果表明声压信号频响函数的基本特征并不随麦克风摆放位置的变化而发生改变,但信号幅值却随测距的增大而逐渐降低。针对本试验所设置的试件损伤工况,该麦克风冲击共振法能够实现对不同形状及规格的损伤区域识别,但对平面尺寸在 60 mm 以下区域的识别效果并不显著。

(3) 通过开展基于麦克风冲击共振法的损伤成像测试,对界面混凝土脱空损伤区域轮廓进行识别。针对试件中某一经栅格化处理后的矩形损伤区域,通过提取各测点处声压频响函数的模态柔度值进行损伤云图绘制。测试结果表明,损伤区域内的声压模态柔度值远大于非脱空区域,且损伤成像云图可直观显示界面混凝土损伤区域的平面轮廓。但在损伤及非损伤区域的边缘交界处,该方法的识别精度受到一定影响,可通过细化激励密度等方式加以改进。

(4) 与其他无损检测技术的识别效果进行了对比分析。其中红外热像法能够直观显示损伤区域的大致轮廓,且采用均匀制热方式的识别效果较制冷效果要好;但该方法对损伤边界及较小区域的识别效果较为模糊,同时对实际工程中结构构件进行均匀制热(冷)也存在一定技术困难。受钢板厚度及仪器测量精度等因素影响,超声探测法对本试验中钢-混凝土板的损伤识别效果并不显著,且在各测点处涂抹耦合剂等试验操

作过程也较为繁琐。因此,该基于麦克风冲击共振测试的钢-混组合结构脱空损伤识别方法具有非接触式、测试成本低、辨识效果理想以及方便快捷等特点。

参考文献:

- [1] 蔡文哲, 史庆轩, 王 斌. 钢管混凝土构件轴向受拉机理和承载力研究[J]. 地震工程与工程振动, 2018, 38(4): 126-133.
CAI Wenzhe, SHI Qingxuan, WANG Bin. Research on the axial tensile mechanism and bearing capacity of concrete filled steel tube members [J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2018, 38(4): 126-133. (in Chinese)
- [2] 黄 远, 黄 登, 陈桂榕, 等. 钢管混凝土叠合柱抗震性能界限状态研究[J]. 地震工程与工程振动, 2018, 38(2): 159-169.
HUANG Yuan, HUANG Deng, CHEN Guirong, et al. Seismic performance limit states of steel tube-reinforced concrete columns [J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2018, 38(2): 159-169. (in Chinese)
- [3] Chen S M, Zhang H F. Numerical analysis of the axially loaded concrete filled steel tube columns with debonding separation at the steel-concrete interface [J]. Steel and Composite Structures, 2012, 13(3): 277-293.
- [4] 汪德江, 杨 晓. 基于裂纹诱导弦挠度的 Timoshenko 梁裂纹无损检测[J]. 工程力学, 2016(12): 191-200.
WANG Dejiang, YANG Xiao. Crack non-destructive test in Timoshenko beams based on crack-induced chord-wise deflection [J]. Engineering Mechanics, 2016(12): 191-200. (in Chinese)
- [5] 张 宏, 余钱华, 吕毅刚. 超声透射法检测钢管拱桥拱肋混凝土质量应用研究[J]. 土木工程学报, 2004, 37(8): 50-53.
ZHANG Hong, YU Qianhua, LV Yigang. Application study of quality testing of the arch-rib concrete of concrete-filled steel tube arch bridge by ultrasonic transmission method [J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(8): 50-53. (in Chinese)
- [6] 刘清元, 熊章绪. 两种测试钢管混凝土内部缺陷的判别方法[J]. 武汉理工大学学报, 2005, 27(6): 38-40.
LIU Qingyuan, XIONG Zhangxu. Two methods of testing defect in concrete-filled steel tubular [J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2005, 27(6): 38-40. (in Chinese)
- [7] 丁 睿. 钢管混凝土拱桥健康监测的光纤传感研究[J]. 土木工程学报, 2005, 38(11): 69-74.
DING Rui. Research on fiber sensing of health monitoring for steel tube-confined concrete arch bridge [J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(11): 69-74. (in Chinese)
- [8] Kweon G, Kim Y. Determination of asphalt concrete complex modulus with impact resonance test [J]. Journal of the Transportation Research Record, 2006, 1970(1): 151-160.
- [9] Lesnicki K J, Kim J Y, Kurtis K E, et al. Characterization of ASR damage in concrete using nonlinear impact resonance acoustic spectroscopy technique [J]. NDT&E International, 2011, 44(8): 721-727.
- [10] Bodnar J L, Nicolas J L, Candore J C, et al. Non-destructive testing by infrared thermography under random excitation and ARMA analysis [J]. International Journal of Thermophysics, 2012, 33(10): 2011-2015.
- [11] 许 斌, 李 冰, 宋刚兵, 等. 基于压电陶瓷的钢管混凝土柱剥离损伤识别研究[J]. 土木工程学报, 2012(7): 86-96.
XU Bin, LI Bing, SONG Gangbing, et al. Detection of the debonding defect of concrete-filled steel tubes with piezoceramics [J]. China Civil Engineering Journal, 2012(7): 86-96. (in Chinese)
- [12] 赵海亮. 基于局部瞬态激励钢砼界面脱空实验研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2014.
ZHAO Hailiang. The experimental research of the void at the interface of the concrete-filled steel tube based on the transient excitation [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2014. (in Chinese)
- [13] Rachael C, Tighe, Janice M, et al. Identification of kissing defects in adhesive bonds using infrared thermography [J]. International Journal Adhesion and Adhesives, 2016, 64: 168-178.
- [14] 杨 金. 基于 HHT 的钢管混凝土缺陷特征提取研究与 FPGA 实现[D]. 湘潭: 湖南科技大学, 2016.
YANG Jin. Feature extraction from concrete-filled steel tube using HHT and FPGA implementation [D]. Xiangtan: Hunan University of Science and Technology, 2016. (in Chinese)
- [15] 朱亚林, 李端洲, 汪正兴, 等. 混合梁斜拉桥钢混结合段脱空识别方法研究[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2017(7): 933-937.
ZHU Yalin, LI Duanzhou, WANG Zhengxing, et al. Study of identification method of steel-concrete joint section void of hybrid girder cable-stayed bridge [J]. Journal of Hefei University of Technology, 2017(7): 933-937.
- [16] Gan T H, Hutchins D A, Billson D R, et al. The use of broadband acoustic transducers and pulse-compression techniques for air-coupled ultrasonic imaging [J]. Ultrasonics, 2001, 39(3): 181-194.
- [17] Zhu J, Popovics J. Non-contact detection of surface waves in concrete using an air-coupled sensor [C]// AIP Conference Proceedings, 2002.
- [18] Berriman J, Purnell P, Hutchins D A, et al. Humidity and aggregate content correction factors for air-coupled ultrasonic evaluation of concrete [J]. Ultrasonics, 2005, 43(4): 211-217.
- [19] Kee S H, Zhu J. Using air-coupled sensors to determine the depth of a surface-breaking crack in concrete [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2010, 127(3): 1279-1287.
- [20] Shin S W, Popovics J S, Oh T. Cost effective air-coupled impact-echo sensing for rapid detection of delamination damage in concrete structures [J]. Advances in Structural Engineering, 2012, 15(6): 887-895.

- [21] Kim G, Kim J Y, Kurtis K E, et al. Quantitative evaluation of carbonation in concrete using nonlinear ultrasound [J]. *Materials & Structures*, 2016, 49(1): 399–409.
- [22] Liao F Y, Han L H, He S H. Behavior of CFST short column and beam with initial concrete imperfection: experiments [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2011, 67(12): 1922–1935.
- [23] Oh T, Popovics J S. Practical visualization of local vibration data collected over large concrete elements [J]. *Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2015, 30: 68–81.
- [24] Oh T, Popovics J S. Application of impact resonance C-scan stack images to evaluate bridge deck conditions [J]. *Journal of Infrastructure Systems*, 2015, 21(1): 04014029–1–8.
- [25] Zou Y, Tong L, Steven G P. Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures—a review [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000(23): 357–378.
- [26] Oh T, Popovics J S, Sim S H. Analysis of vibration for regions above rectangular delamination defects in solids [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(7): 1766–1776.
- [27] Hazell C R, Mitchell A K. Experimental eigenvalues and mode shapes for flat clamped plates [J]. *Experimental Mechanics*, 1986, 26(3): 209–216.
- [28] Mitchell A K, Hazell C R. A simple frequency formula for clamped rectangular plates [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, 118(2): 271–281.
- [29] Ham S, Song H, Oelze M L, et al. A contactless ultrasonic surface wave approach to characterize distributed cracking damage in concrete [J]. *Ultrasonics*, 2017, 75: 46–57.
- [30] Mercier J F. Mathematical modeling of time-harmonic aeroacoustics with a generalized impedance boundary condition [J]. *Esaim Mathematical Modelling & Numerical Analysis*, 2014, 48(5): 1529–1555.
- [31] Schimizze B, Son S F, Goel R, et al. An experimental and numerical study of blast induced shock wave mitigation in sandwich structures [J]. *Applied Acoustics*, 2013, 74(1): 1–9.
- [32] Rayleigh J W. *The theory of sound* [M]. Dover Publications, 1945.