

$$R(t, x_j) = a_1(t) + 2a_2(t)x_j + 3a_3(t)x_j^3 + \dots + na_n(t)x_j^{n-1} \quad (j=1, \dots, n) \quad (2.5)$$

$Y$  为测点的位移,  $R$  为测点的转角。在有限单元法中, 梁单元变形曲线为三次多项式, 对于荷载作用下的欧拉梁, 应当取不低于三次的多项式拟合梁的挠曲线。为求解三次多项式中的四个参数, 应至少在梁上布置四个测点。

根据以上方程可知, 只要测量得到  $t$  时刻四个测点的位移  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , 基于梁单元变形曲线为三次多项式的假定, 且已知四个测点的位置  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 可以拟合得到梁在  $t$  时刻的挠曲线方程 (2.4), 求解出四个系数  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , 将四个系数代入式 (2.5) 可求得梁在  $t$  时刻拟合的转角曲线, 即可计算出  $t$  时刻横坐标为  $x_k$  处的转角  $\theta$ 。

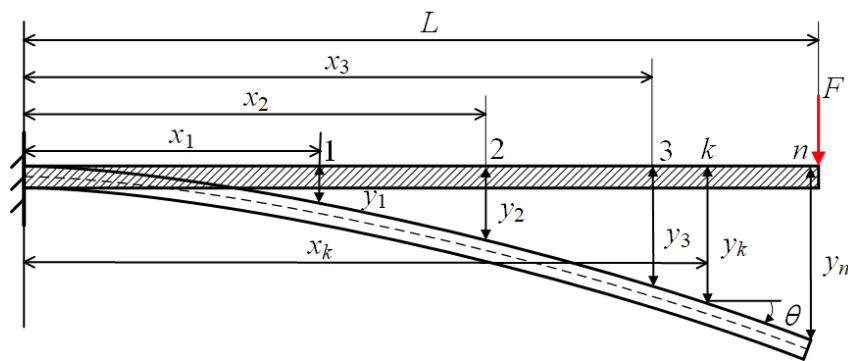


图 2.6 欧拉-伯努利梁模型

### 2.3.2 数值模拟

为验证转角曲线拟合方法的准确性, 本节将利用 Sap2000 软件进行有限元数值模拟, 对不同的测点布置方案下的有限元结果进行比较, 确定测点的数量, 测点的位置和荷载施加的位置。

#### 2.3.2.1 悬臂梁受静力荷载

数值模拟对象为忽略剪切变形和转动惯量影响的欧拉悬臂梁模型, 悬臂梁的长度为 1.025m, 划分为 41 个单元, 每个单元长 25mm。梁单元材料为 Q235 钢。梁的截面尺寸如图 2.7 所示, 截面面积为  $150\text{mm}^2$ , 惯性矩为  $312.5\text{mm}^4$ , 截面弹性模量为  $2.1 \times 10^5 \text{MPa}$ , 质量密度为  $8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ , 考虑加载位置对拟合精度的影响, 分别在 1/4 点、1/2 点、3/4 点和悬臂端, 共 4 个点施加 100N 的方向向下的竖向集中力, 定义弯曲平面内的四个静力分析工况, 如图 2.8 所示。在每个工况下, 考虑测点数量、测点位置、测点对称布置或等间距布置对拟合效果的影响, 设置了如图 2.9 所示的五种测点布置方案。其中方案 1 和方案 2 使用三次多项式拟合梁的挠曲线, 方案 3 使用四次多项式拟合梁的挠曲线, 方案 4 和方案 5 使用五次多项式拟合梁的挠曲线。表 2.4 至表 2.7 为各静力分析工况下, 每种测点布置方

案的转角拟合结果与 Sap2000 计算结果的对比。通过多项式拟合方法得到的平动位移曲线与 Sap2000 计算得到的实际平动位移曲线的对比结果见图 2.10 至图 2.13。

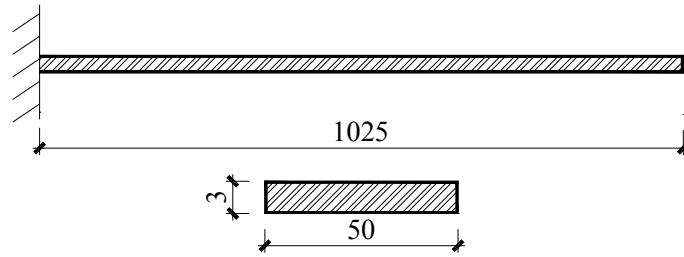


图 2.7 悬臂梁模型的截面尺寸 (单位: mm)

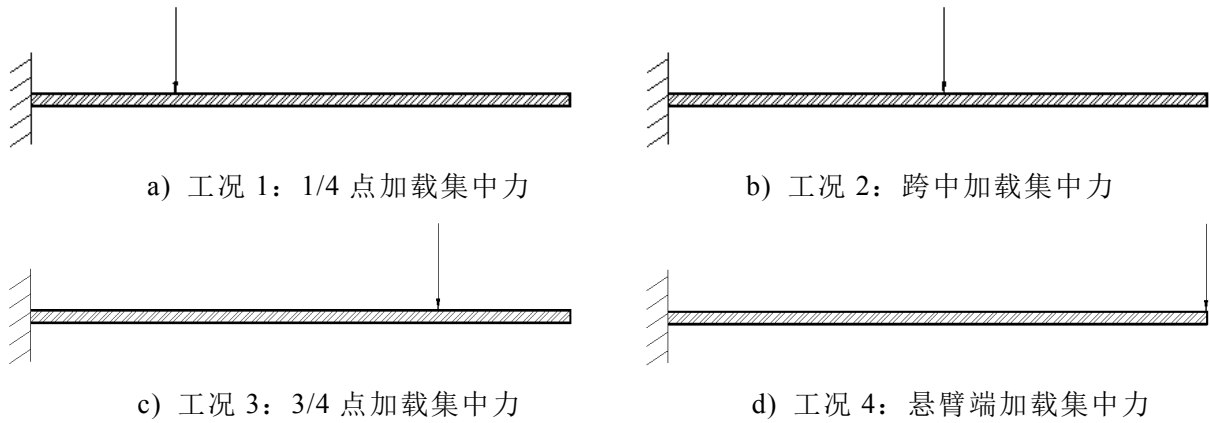


图 2.8 悬臂梁模型的静力分析工况

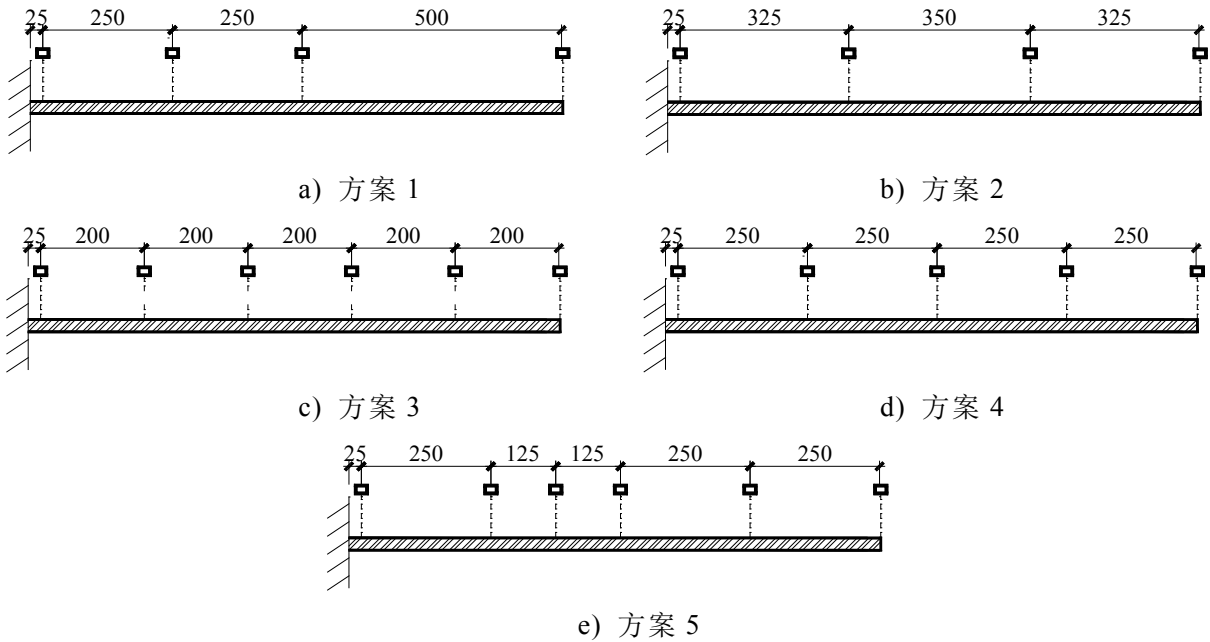


图 2.9 悬臂梁模型的测点布置方案

表 2.4 工况 1 下 1/4 点加载时拟合转角与 Sap2000 结果对比

坐标 (m)	Sap2000	方案 1		方案 2		方案 3		方案 4		方案 5	
	结果	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差
	(°)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)
0.2	0.0533	0.0464	15.02%	0.0466	14.54%	0.0481	10.78%	0.0512	4.25%	0.0513	4.04%
0.4	0.0576	0.0581	-0.85%	0.0551	4.64%	0.0583	-1.13%	0.0587	1.79%	0.0580	-0.71%
0.6	0.0576	0.0622	-7.43%	0.0592	-2.71%	0.0583	-1.10%	0.0570	1.02%	0.0571	0.96%
0.8	0.0576	0.0588	-1.93%	0.0590	-2.41%	0.0562	2.51%	0.0583	-1.22%	0.0592	-2.70%
1	0.0576	0.0476	20.95%	0.0545	5.68%	0.0602	-4.36%	0.0556	3.69%	0.0536	7.44%

注：相对误差 = (Sap2000 计算角度 - 拟合角度) / 拟合角度 × 100%。

表 2.5 工况 2 下跨中加载时拟合转角与 Sap2000 结果对比

坐标 (m)	Sap2000	方案 1		方案 2		方案 3		方案 4		方案 5	
	结果	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差
	(°)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)
0.2	0.1295	0.1257	3.07%	0.1247	3.83%	0.1328	-2.43%	0.1319	-1.83%	0.1303	-0.57%
0.4	0.1981	0.1968	0.67%	0.1867	6.08%	0.1974	0.33%	0.1963	0.89%	0.1976	0.23%
0.6	0.2100	0.2272	-7.59%	0.2182	-3.78%	0.2113	-0.62%	0.2120	-0.95%	0.2123	-1.07%
0.8	0.2100	0.2171	-3.27%	0.2193	-4.23%	0.2069	1.49%	0.2082	0.88%	0.2045	2.69%
1	0.2100	0.1663	26.28%	0.1898	10.62%	0.2167	-3.11%	0.2140	-1.88%	0.2220	-5.42%

注：相对误差 = (Sap2000 计算角度 - 拟合角度) / 拟合角度 × 100%。

表 2.6 工况 3 下 3/4 点加载时拟合转角与 Sap2000 结果对比

坐标 (m)	Sap2000	方案 1		方案 2		方案 3		方案 4		方案 5	
	结果	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差
	(°)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)
0.2	0.2057	0.2052	0.24%	0.2050	0.34%	0.2070	-0.62%	0.2046	0.53%	0.2051	0.28%
0.4	0.3505	0.3503	0.05%	0.3485	0.56%	0.3505	0.00%	0.3511	-0.17%	0.3506	-0.04%
0.6	0.4343	0.4370	-0.62%	0.4354	-0.25%	0.4330	0.30%	0.4336	0.16%	0.4337	0.13%
0.8	0.4576	0.4652	-1.64%	0.4657	-1.73%	0.4627	-1.10%	0.4595	-0.41%	0.4609	-0.71%
1	0.4576	0.4351	5.18%	0.4393	4.16%	0.4477	2.22%	0.4551	0.55%	0.4517	1.32%

注：相对误差 = (Sap2000 计算角度 - 拟合角度) / 拟合角度 × 100%。

表 2.7 工况 4 下悬臂端加载时拟合转角与 Sap2000 结果对比

坐标 (m)	Sap2000	方案 1		方案 2		方案 3		方案 4		方案 5	
	结果	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差	角度	相对误差
	(°)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)	(°)	(%)
0.2	0.2819	0.2819	0.00%	0.2819	0.00%	0.2819	0.00%	0.2819	0.00%	0.2819	0.00%
0.4	0.5029	0.5029	0.00%	0.5029	0.00%	0.5029	0.00%	0.5029	0.00%	0.5029	0.00%
0.6	0.6629	0.6629	0.00%	0.6629	0.00%	0.6629	0.00%	0.6629	0.00%	0.6629	0.00%
0.8	0.7619	0.7619	0.00%	0.7619	0.00%	0.7619	0.00%	0.7619	0.00%	0.7619	0.00%
1	0.8000	0.8000	0.00%	0.8000	0.00%	0.8000	0.00%	0.8000	0.00%	0.8000	0.00%

注：相对误差 = (Sap2000 计算角度 - 拟合角度) / 拟合角度 × 100%。

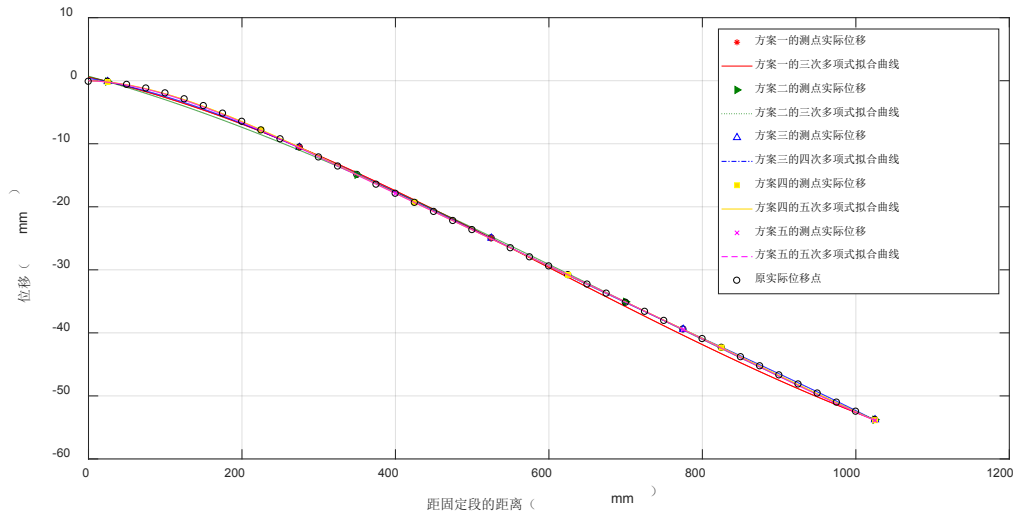


图 2.10 工况 1 下 1/4 点加载时悬臂梁的平动位移拟合曲线

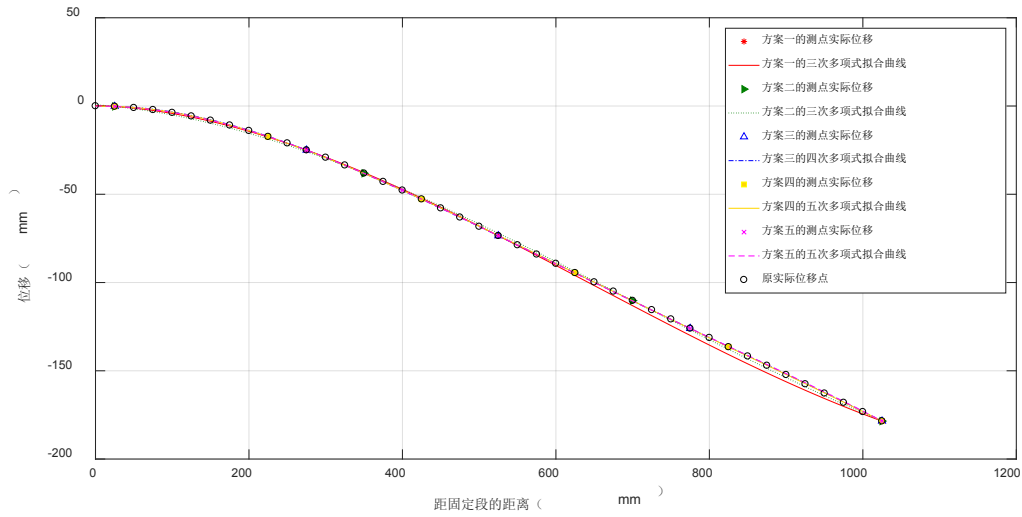


图 2.11 工况 2 下跨中加载时悬臂梁的平动位移拟合曲线

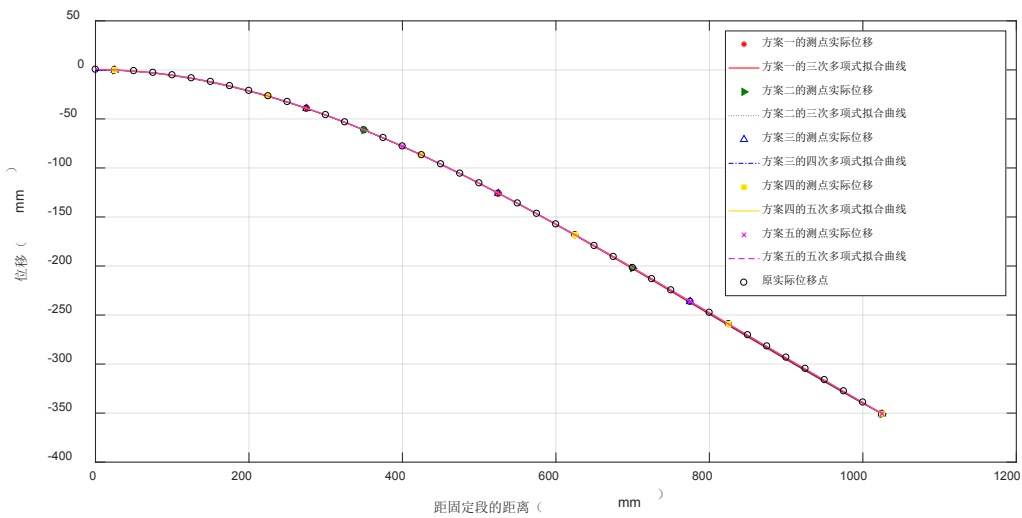


图 2.12 工况 3 下 3/4 点加载时悬臂梁的平动位移拟合曲线

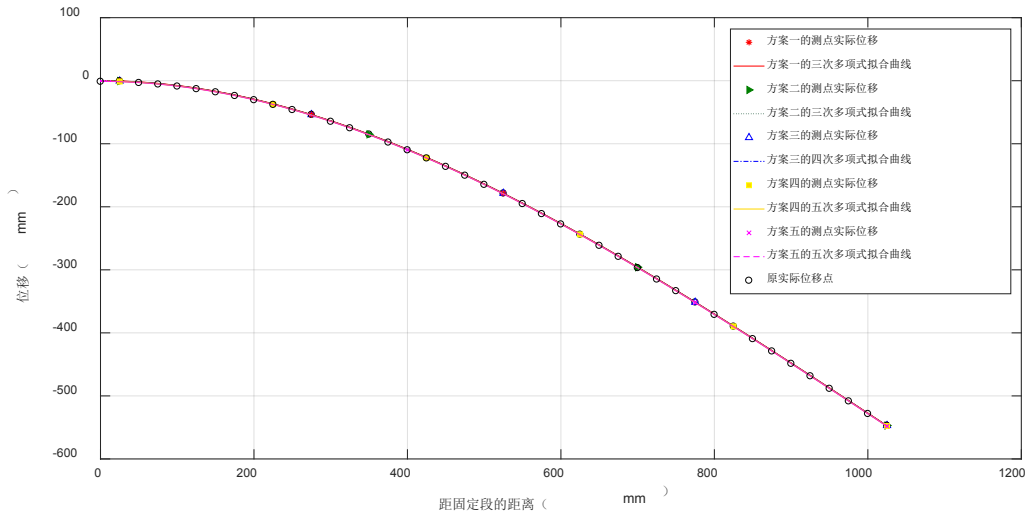


图 2.13 工况 4 下悬臂端加载时悬臂梁的平动位移拟合曲线

根据表 2.4 至表 2.7 和图 2.10 至图 2.13 的结果可以得到如下结论，对于采用欧拉-伯努利梁理论的悬臂梁模型，集中荷载加载位置越靠近悬臂梁端，转角拟合结果越理想。工况 4 下梁的平动变形曲线基本与原实际位移点重合，选取的五个坐标点下的拟合转角与 Sap2000 计算的转角基本没有误差，因此选择悬臂梁端作为施加集中荷载的位置。对比所有工况下的方案 1 和方案 2 之间，方案 4 和方案 5 之间的角度相对误差，可以发现方案 2 的误差整体来说小于方案 1 的误差，方案 4 的误差整体来说小于方案 5 的误差。由此可见，测点应尽量等间距布置。对比所有工况下方案 2、方案 3 和方案 4 的角度相对误差，可以观察到误差减少，由此可以说明当测点等间距布置时，测点数越多，精度越高。综合来看，无论在悬臂梁模型何处加载集中力，方案 4 的效果始终满足误差不大于 5% 的要求，满足工程精度要求。

表 2.8 工况 4 施加 5db 噪声后拟合转角与 Sap2000 结果对比

坐标 (m)	Sap2000	方案 2		方案 3		方案 4	
	结果 (°)	角度 (°)	相对误差 (%)	角度 (°)	相对误差 (%)	角度 (°)	相对误差 (%)
0.2	0.2819	0.2825	-0.23%	0.2836	-0.61%	0.2834	-0.53%
0.4	0.5029	0.5032	-0.06%	0.5066	-0.73%	0.5036	-0.15%
0.6	0.6629	0.6630	-0.03%	0.6636	-0.11%	0.6635	-0.10%
0.8	0.7619	0.7622	-0.03%	0.7601	0.24%	0.7643	-0.31%
1	0.8000	0.8005	-0.06%	0.8014	-0.18%	0.7956	0.55%

注：相对误差 = (Sap2000 计算角度 - 拟合角度) / 拟合角度 × 100%。

实际应用时，每个测点的结果不可避免会受到噪声的影响，对悬臂梁上的测点位移施加 5db 噪声，然后拟合得到挠度曲线，获得每个测点的转角。对比工况 4 下的方案 2、方案 3、方案 4 的角度相对误差，结果如表 2.8 所示。所有方案的

角度相对误差都在 1%内，拟合精度良好。以上分析说明，使用转动曲线拟合方法对受静载试验的悬臂梁进行角度拟合可行，集中荷载应施加在悬臂端，均匀、对称的布置四个及四个以上的测点。

### 2.3.2.2 悬臂梁受脉冲激励

采用 Sap2000 的时程分析工况定义如图 2.14 所示脉冲激励，施加于 2.3.2.1 节所述悬臂梁模型的悬臂端，设定阻尼比为 0.02，输出时段数为 10000，时段步长为 0.005，计算获得跨中节点的转角时程响应如图 2.15，与图 2.16 所示的方案 1、2、3 拟合的跨中节点转角时程结果对比。并对测点的位移响应施加 5db 噪声，以观察噪声对动转角拟合效果的影响。三种方案下的动转角拟合曲线与 Sap2000 结果的对比如图 2.17 至图 2.22 所示。

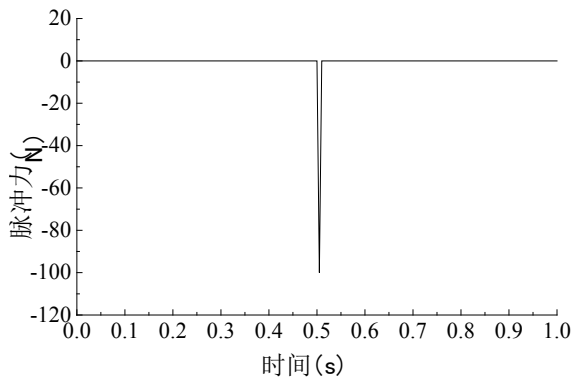


图 2.14 输入的脉冲力响应

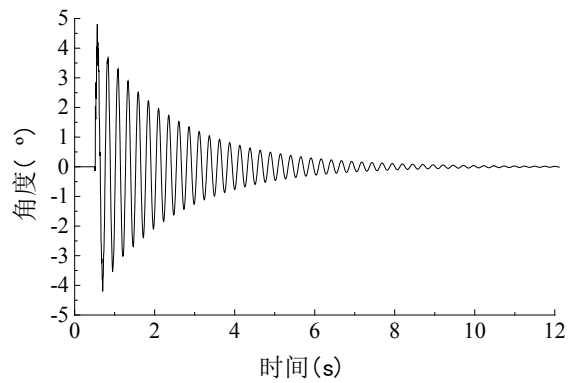
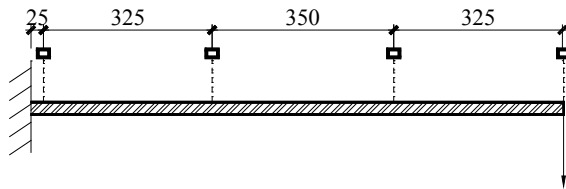
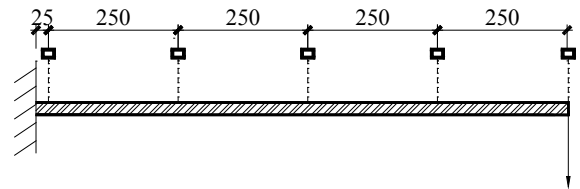


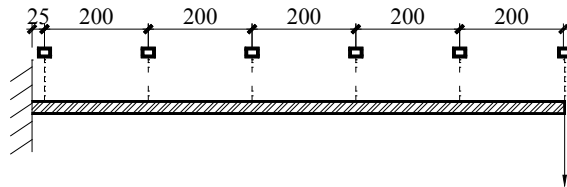
图 2.15 输出的跨中节点的动转角响应



a) 四个测点的方案 1

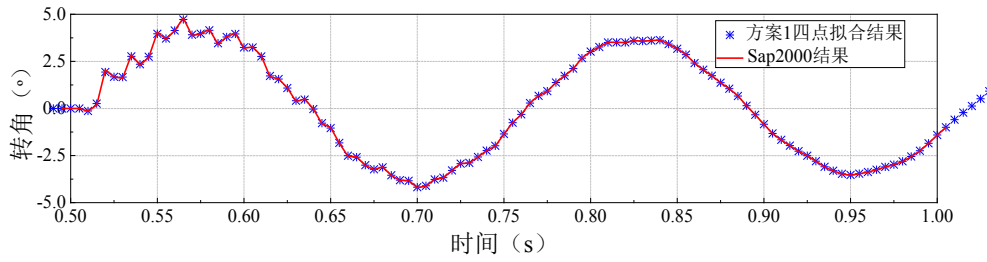


b) 五个测点的方案 2

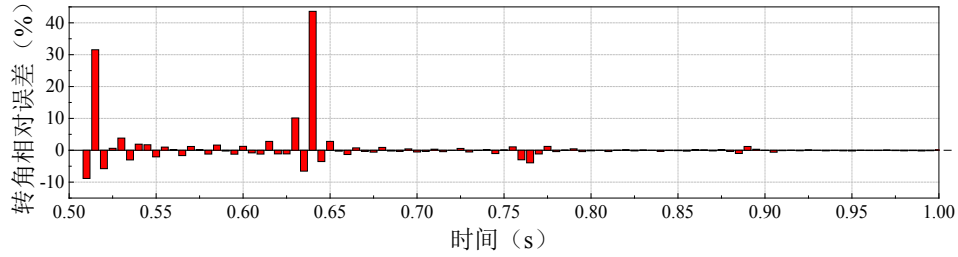


c) 六个测点的方案 3

图 2.16 悬臂梁模型的悬臂端受脉冲力



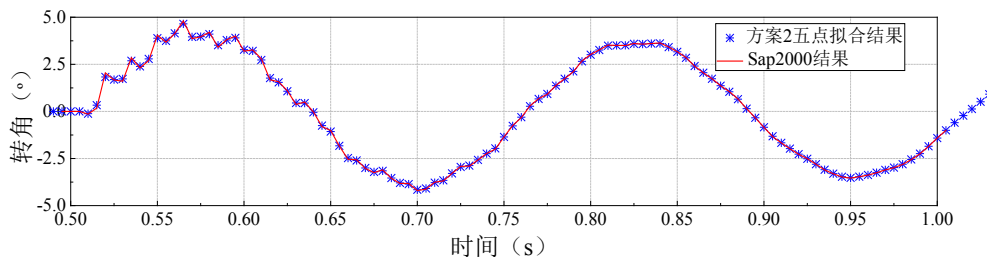
a) 0.5~1 秒内梁跨中节点的动转角时程曲线



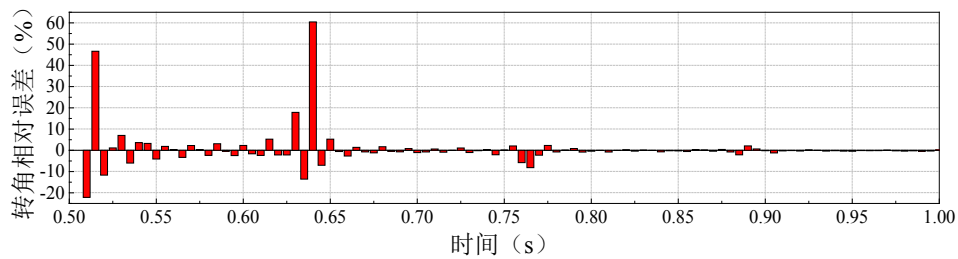
b) 转角相对误差

注：转角相对误差= (Sap2000 计算角度-拟合角度) /拟合角度×100%。

图 2.17 无噪声时方案 1 跨中节点的动转角拟合曲线及相对误差



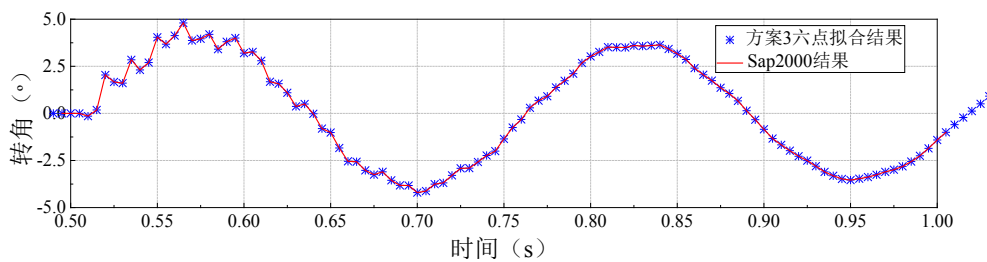
a) 0.5~1 秒内梁跨中节点的动转角时程曲线



b) 转角相对误差

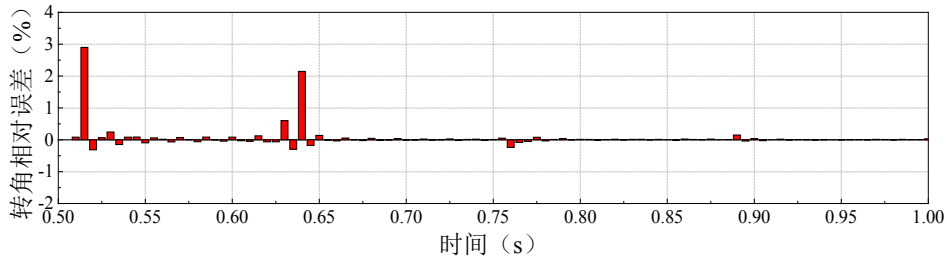
注：转角相对误差= (Sap2000 计算角度-拟合角度) /拟合角度×100%。

图 2.18 无噪声时方案 2 跨中节点的动转角拟合曲线及相对误差



a) 0.5~1 秒内梁跨中节点的动转角时程曲线

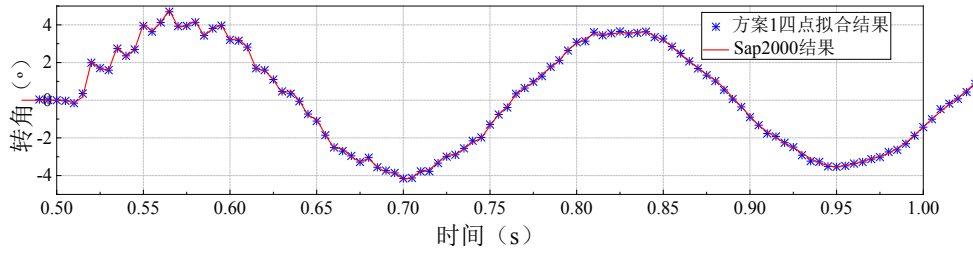




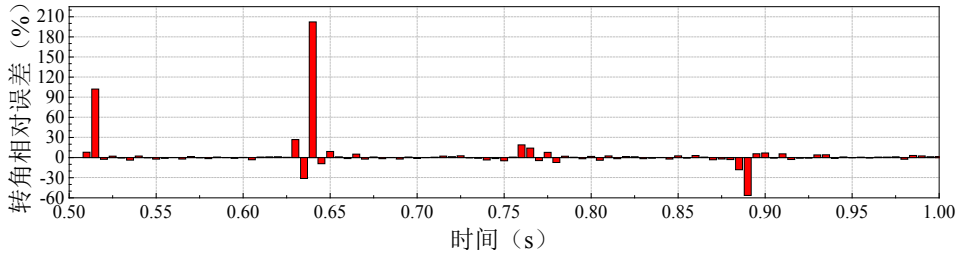
b) 转角相对误差

注：转角相对误差 = (Sap2000 计算角度 - 拟合角度) / 拟合角度 × 100%。

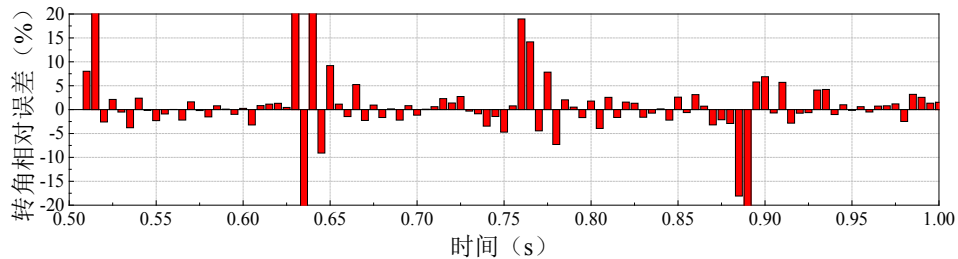
图 2.19 无噪声时方案 3 跨中节点的动转角拟合曲线及相对误差



a) 施加 5db 噪声后在 0.5~1 秒内梁跨中节点的动转角时程曲线



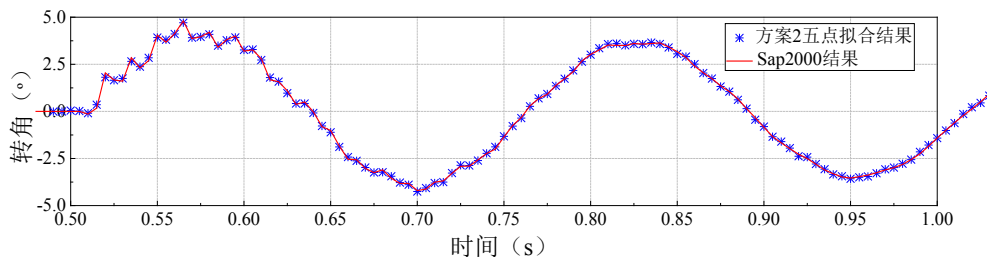
b) 转角相对误差



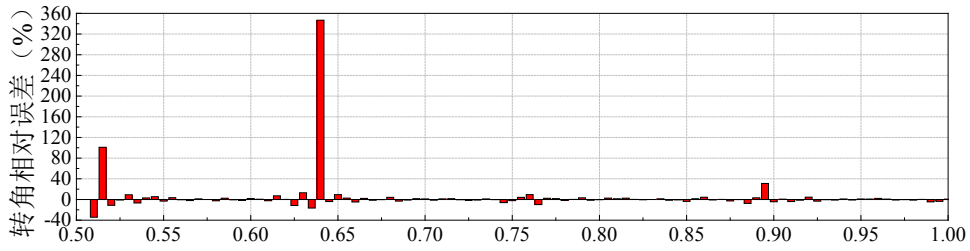
c) 转角相对误差局部放大

注：转角相对误差 = (Sap2000 计算角度 - 拟合角度) / 拟合角度 × 100%。

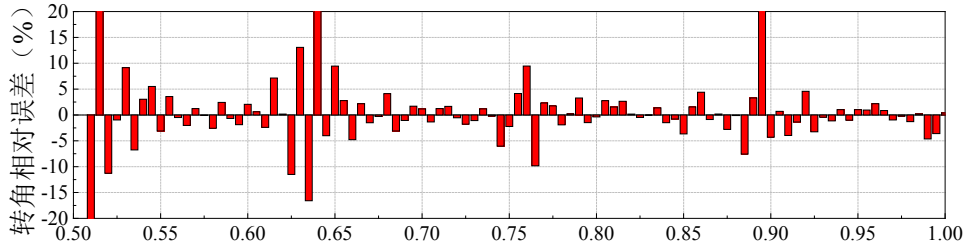
图 2.20 施加 5db 噪声时方案 1 跨中节点的动转角拟合曲线及相对误差



a) 施加 5db 噪声后在 0.5~1 秒内梁跨中节点的动转角时程曲线



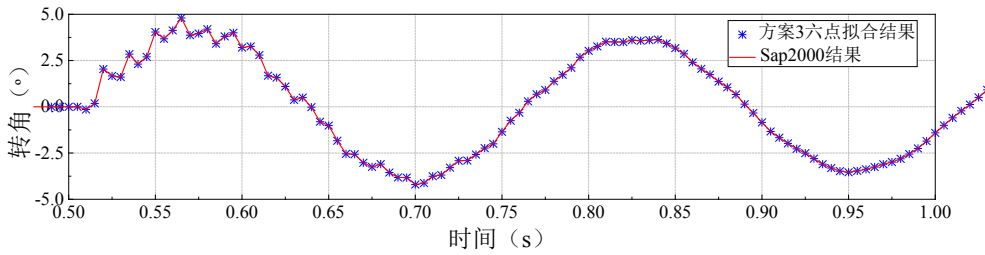
b) 转角相对误差



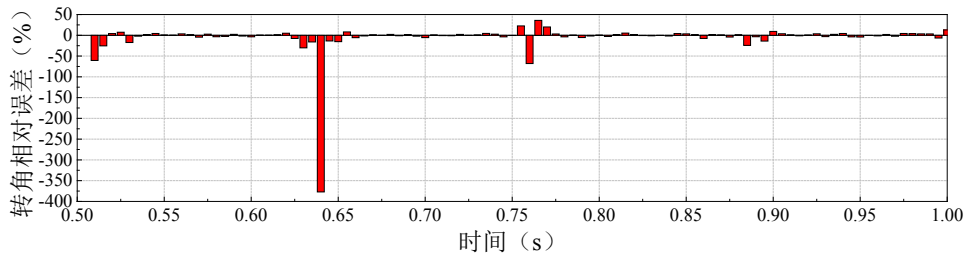
c) 转角相对误差局部放大

注：转角相对误差= (Sap2000 计算角度-拟合角度) /拟合角度×100%。

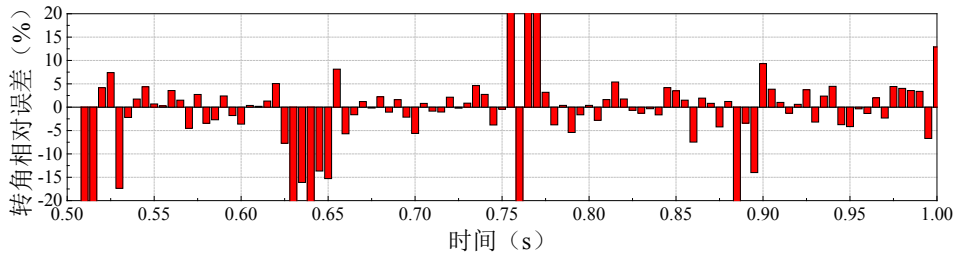
图 2.21 施加 5db 噪声时方案 2 跨中节点的动转角拟合曲线及相对误差



a) 施加 5db 噪声后在 0.5~1 秒内梁跨中节点的动转角时程曲线



b) 转角相对误差



c) 转角相对误差局部放大

注：转角相对误差= (Sap2000 计算角度-拟合角度) /拟合角度×100%。

图 2.22 施加 5db 噪声时方案 3 跨中节点的动转角拟合曲线及相对误差

根据图 2.17 至图 2.22 的结果，发现跨中节点的动转角曲线在角度接近于 0 处，转角相对误差会突然增大，这是因为角度较小时，转角拟合方法存在的误差相对而言占的比重更大，在静载工况下也同样存在这一现象，当施加的力引起的结构位移越大，那么角度拟合效果会越好。无噪声时，方案 3 的转角相对误差小于 5%，方案 2 和方案 1 除角度接近于 0 处的时刻，相对误差基本都在 5% 以内。在平动反应中加入 5db 白噪声后，三种测点布置方案除角度接近于 0 处的时刻，大部分时刻的相对误差基本都在 5% 内，满足工程精度要求。方案 3 由于有 6 个测点，对比方案 1 和方案 2，角度拟合效果受噪声影响更大。整体来说，悬臂梁受静载时的转角拟合精度要高于受脉冲激励时的精度。激光位移计宜对称、均匀布置，且在能反映挠度曲线特征的点（如极值点、拐点等）附近宜增加测点数。对悬臂梁而言，在保证拟合精度和方便操作的前提下，建议等间距布置 4-5 个激光位移计。

## 2.4 MEMS 陀螺仪传感器的角度测量精度验证试验

通过数值模拟确定了转角拟合方法的准确性，并确定了荷载施加于悬臂端，激光位移计测点等间距，对称布置 4-5 个以后，本节对深圳维特智能科技的 HWT901B 陀螺仪传感器进行了精度验证试验，由于静态测量是动态测量的基础，应对 MEMS 陀螺仪传感器先进行静态角度测量精度验证，再验证动态测量精度。

### 2.4.1 传感器的静态角度测量精度验证试验

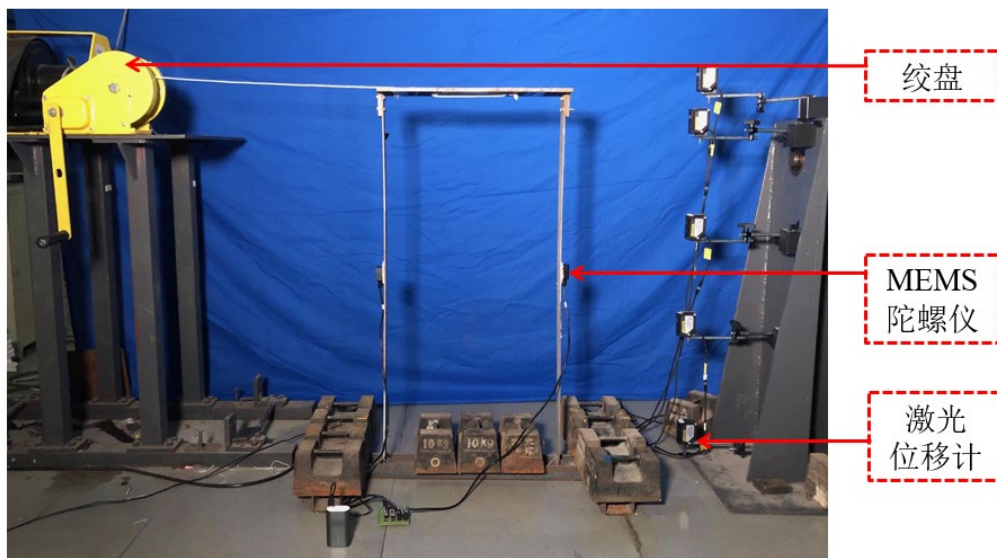


图 2.23 静态角度测量精度验证试验模型

试验结构模型为如图 2.23 所示的门式钢框架结构，选取其右侧的柱构件为试验对象。柱的尺寸为  $B \times W \times L = 50\text{mm} \times 3\text{mm} \times 1060\text{mm}$ ，角度信号由维特智能 HWT901B 陀螺仪传感器采集，共布置 2 个 MEMS 陀螺仪传感器，位于门式框架

右侧柱构件 1/2 位置的传感器用来测量柱中间节点的转角，左侧柱构件上对称布置的传感器用来保持框架结构质量对称。该 MEMS 陀螺仪传感器的照片以及测量安装图如图 2.25 所示。位移信号由日本基恩士 IL300+IL1000 激光位移计采集，其量程为 280mm，精度为 0.7mm。该激光位移计的照片以及测量安装图如图 2.24 所示。试验共布置 5 个激光位移计，顶端布置 1 个用于控制初位移，后 4 个以 23cm 为间距等距离布置，用于测量柱的位移。在静态角度验证试验中，设置了 20 组初位移，测量结果如表 2.9 所示。

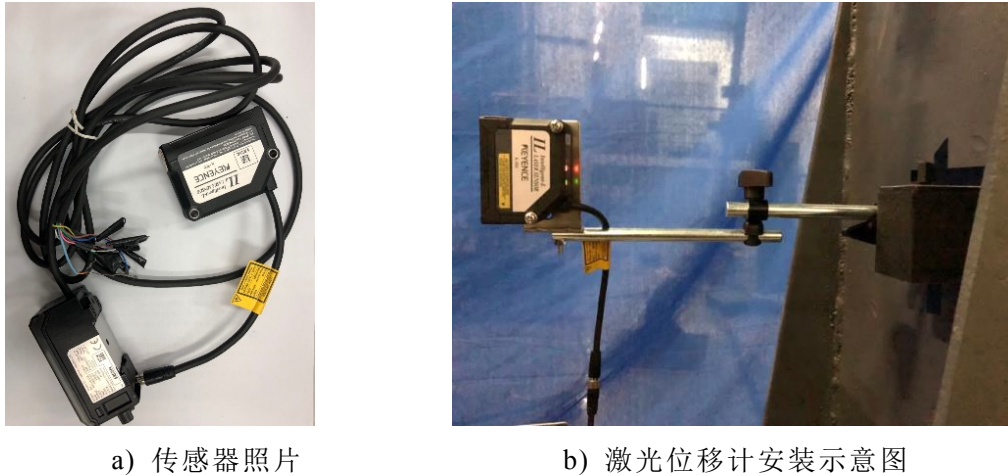


图 2.24 激光位移计照片及安装示意图

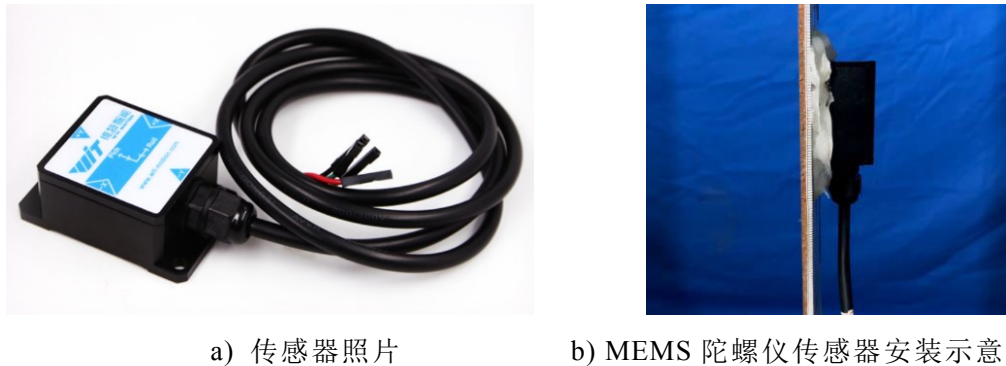


图 2.25 MEMS 陀螺仪传感器照片及安装示意图

表 2.9 中，测量差值=陀螺仪传感器测得角度-激光位移计拟合转角。

平均误差 =  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\text{测量差值}|$ ， $n$  为测量值个数。均方误差 =  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{测量差值})^2$ 。从测量结果可以看出，测量误差的均值为  $0.051^\circ$ ，均方根误差为  $0.042^\circ$ 。最大静态测量误差为  $-0.108^\circ$ ，最小静态测量误差仅为  $0.004^\circ$ 。

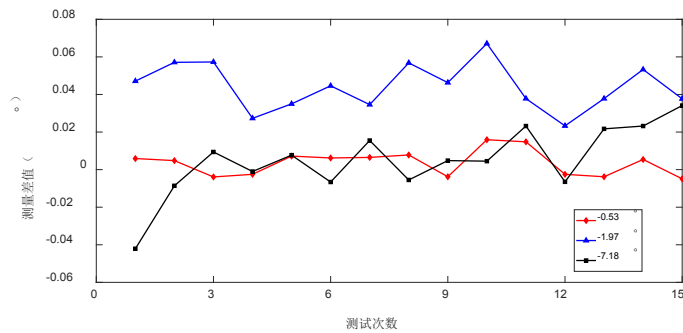
为了测试角度测量系统的重复性，选取了水平位移分别为  $-7\text{mm}$ 、 $-25\text{mm}$ 、 $-92\text{mm}$  的三个位置，角度分别为  $-0.53^\circ$ 、 $-1.97^\circ$  和  $-7.18^\circ$ 。在每个位置进行 15 次测量试验，测量差值如图 2.26 所示。三个位置的重复性均方根误差分别为 0.007、0.012 和 0.018，有较好的测量重复性。

表 2.9 静态角度验证试验测量结果

初位移 (mm)	陀螺仪读数 (°)	角度拟合值 (°)	测量差值 (°)
-5	-0.38	-0.384	0.004
-10	-0.77	-0.768	-0.002
-15	-1.19	-1.171	-0.019
-20	-1.56	-1.524	-0.036
-25	-1.95	-1.915	-0.035
-30	-2.4	-2.359	-0.041
-35	-2.79	-2.742	-0.048
-40	-3.24	-3.187	-0.053
-45	-3.66	-3.552	-0.108
-50	-3.98	-3.886	-0.094
-55	-4.38	-4.294	-0.086
-60	-4.74	-4.669	-0.071
-65	-5.13	-5.048	-0.082
-70	-5.53	-5.458	-0.072
-75	-5.94	-5.842	-0.098
-80	-6.3	-6.238	-0.062
-85	-6.69	-6.602	-0.088
-90	-7.08	-7.011	-0.069
-95	-7.43	-7.414	-0.017
-100	-7.77	-7.835	0.065

平均误差：0.051

均方误差：0.042



注：测量差值=陀螺仪传感器测得角度-激光位移计拟合转角。

图 2.26 重复性试验测量结果

### 2.4.2 传感器的动态角度测量精度验证试验

试验结构模型为如图 2.27 所示，仍使用上一节的门式钢框架结构，选取其右侧的柱构件为试验对象。角度信号由维特智能 HWT901B 陀螺仪传感器测量，通过 PC 端的上位机采集，采样频率为 200Hz。位移响应使用日本基恩士 IL300+IL1000 激光位移计测量，通过 LMS Cadax-8 便携式动态信号分析仪采集并储存，采样频率设为 200Hz。试验共布置 5 个激光位移计，顶端布置 1 个用于控制初位移，后 4 个以 23cm 为间距等距离布置，用于测量柱的平动位移响应。试验时，通过左侧绞盘牵引施加初位移。然后剪断绳子瞬时释放，结构恢复自由振动状态。

为验证动力试验时，MEMS 陀螺仪传感器在不同频率振动下的测量精度，分别设置了 2mm-10mm 的低频工况，和 20mm-100mm 的高频工况。在低频工况中，每隔 2mm 设置一次工况。在高频工况中，每隔 20mm 设置一次工况。由第 2.3.1 节所述的转动响应曲线拟合方法可以得到激光位移计测得的转动时程响应，与 MEMS 陀螺仪传感器测得的转动时程响应结果对比如图 2.28~图 2.37 所示。

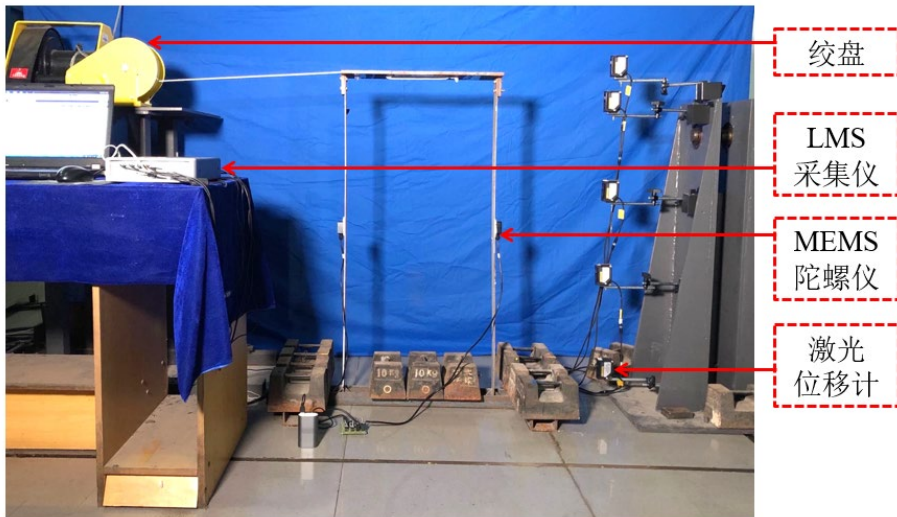


图 2.27 动态角度测量精度验证试验模型

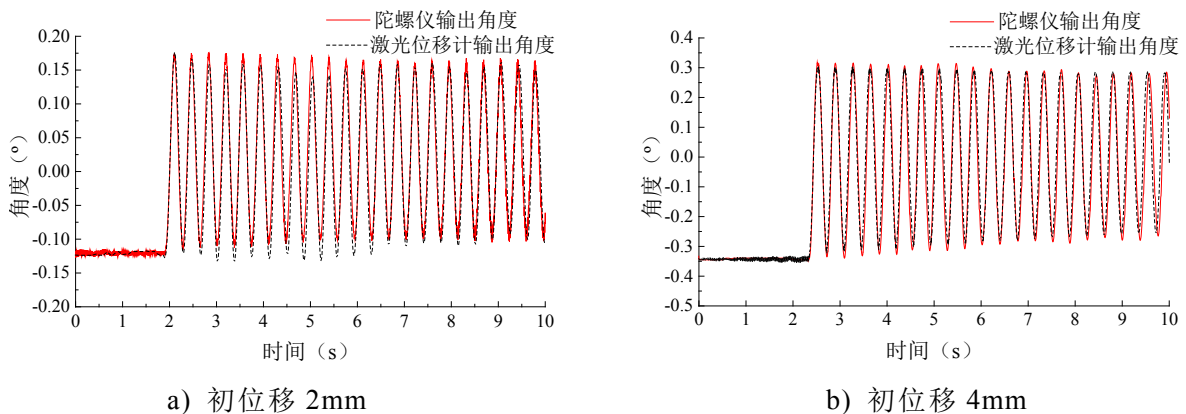
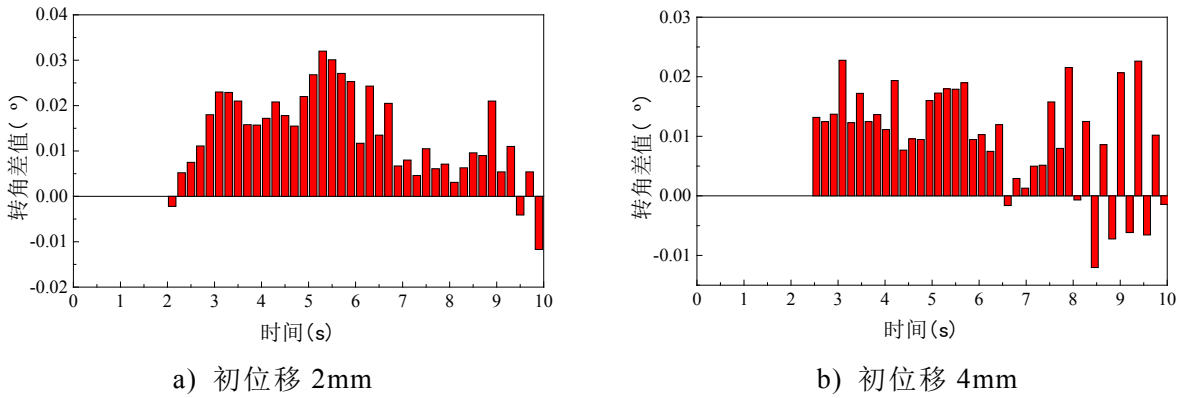


图 2.28 初位移为 2mm 和 4mm 时激光位移计和 MEMS 陀螺仪传感器所测转角响应对比



注：转角差值=陀螺仪传感器测得角度-激光位移计拟合转角。

图 2.29 初位移为 2mm 和 4mm 时柱的转角响应在波峰波谷处的相对差值

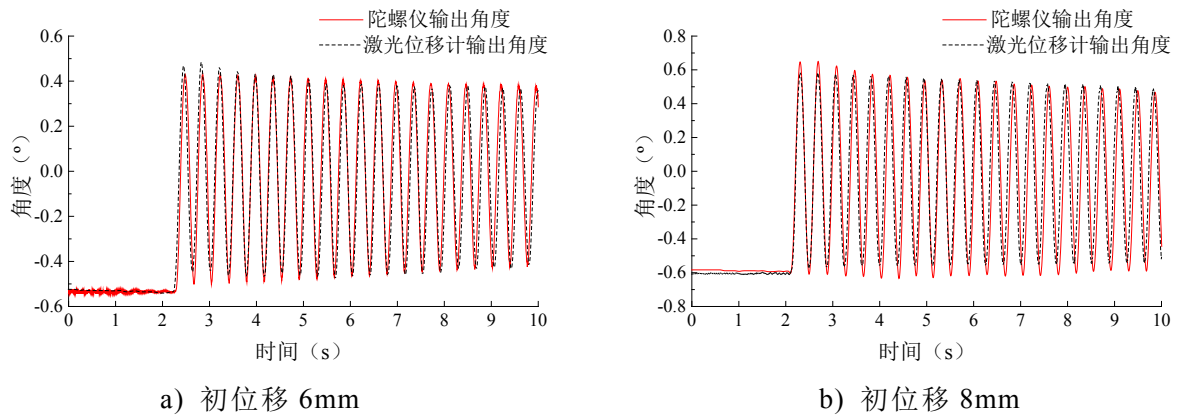
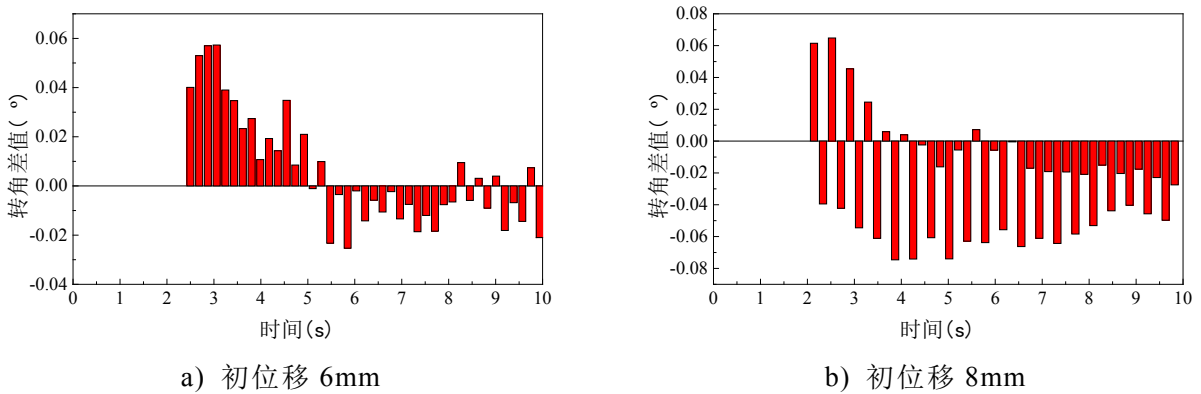


图 2.30 初位移为 6mm 和 8mm 时激光位移计和 MEMS 陀螺仪传感器所测转角响应对比



注：转角差值=陀螺仪传感器测得角度-激光位移计拟合转角。

图 2.31 初位移为 6mm 和 8mm 时柱的转角响应在波峰波谷处的相对差值

通过图 2.28~图 2.37 中 MEMS 陀螺仪传感器与激光位移计输出的角度的对比，可以明显观察出：随着初位移的增大，MEMS 陀螺仪传感器与激光位移计输出的角度差值也随之增大。分析误差产生的原因主要为以下两点：

(1) 根据动转角拟合原理，应保证激光位移计发射的激光，门式框架受激励后振动的二维平面，绞盘上绳子施加力的方向均在同一个平面内。由于现场试验条件限制，很容易产生误差。

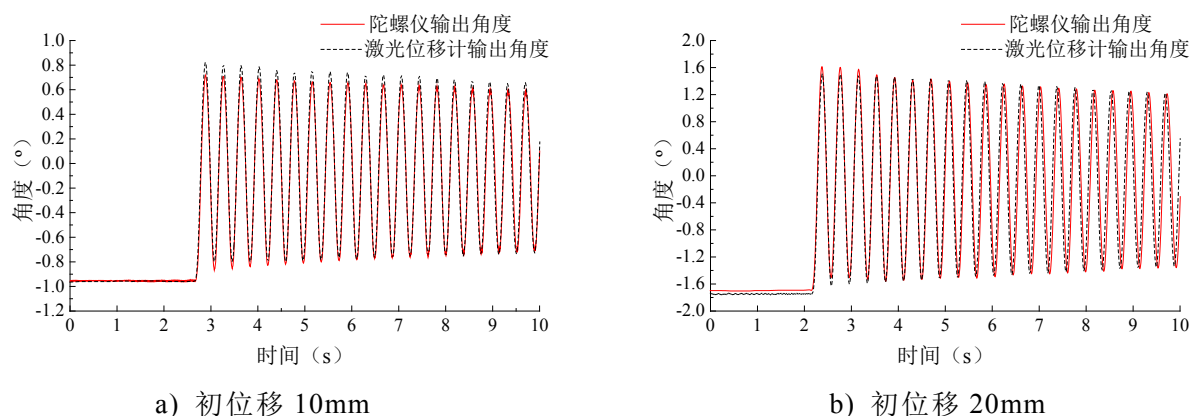
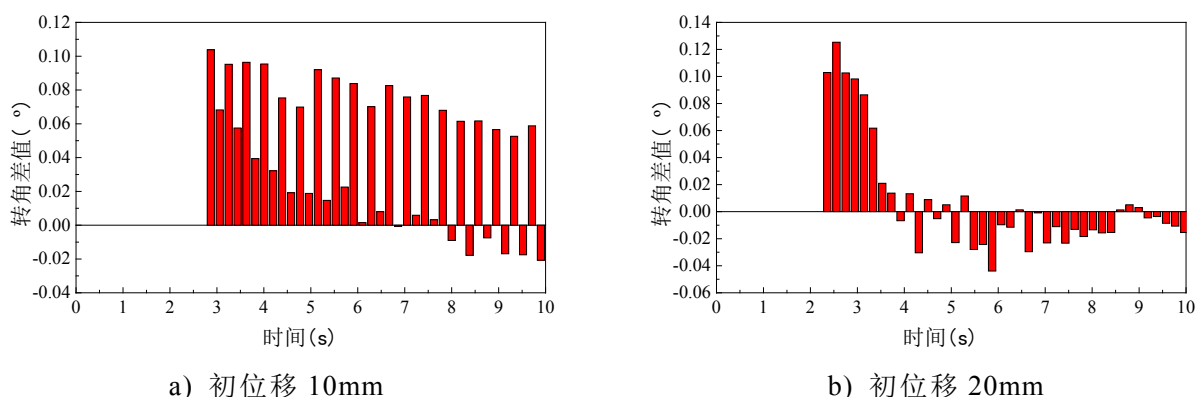


图 2.32 初位移为 10mm 和 20mm 时激光位移计和 MEMS 陀螺仪传感器所测转角响应对比



注：转角差值=陀螺仪传感器测得角度-激光位移计拟合转角。

图 2.33 初位移为 10mm 和 20mm 时柱的转角响应在波峰波谷处的相对差值

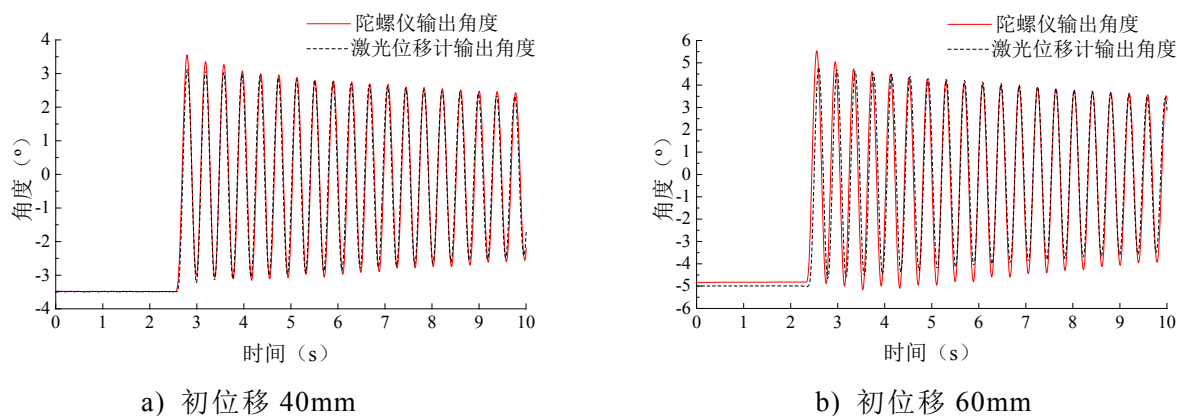
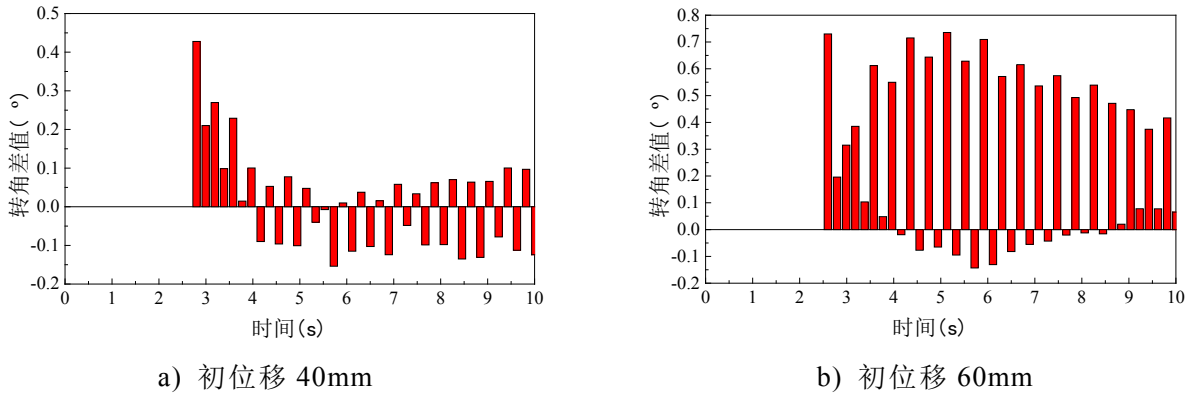


图 2.34 初位移为 40mm 和 60mm 时激光位移计和 MEMS 陀螺仪传感器所测转角响应对比

(2) 激光位移计所测量构件平面的表面不够平整。

对动力试验条件下 MEMS 陀螺仪传感器的角度测量精度进行验证, 保证测量的响应信息准确, 是开展后续的研究、试验的前提。综合静态角度测量和动态角度测量试验的结果来看, 在结构初位移为 100mm 以内, 可以基本保证 MEMS 陀螺仪传感器静态角度测量的精度为  $0.05^\circ$ , 测量重复性良好。在结构初位移为 10mm 以内, 可以基本保证动态角度测量的精度为  $0.1^\circ$ 。





注：转角差值=陀螺仪传感器测得角度-激光位移计拟合转角。

图 2.35 初位移为 40mm 和 60mm 时柱的转角响应在波峰波谷处的相对差值

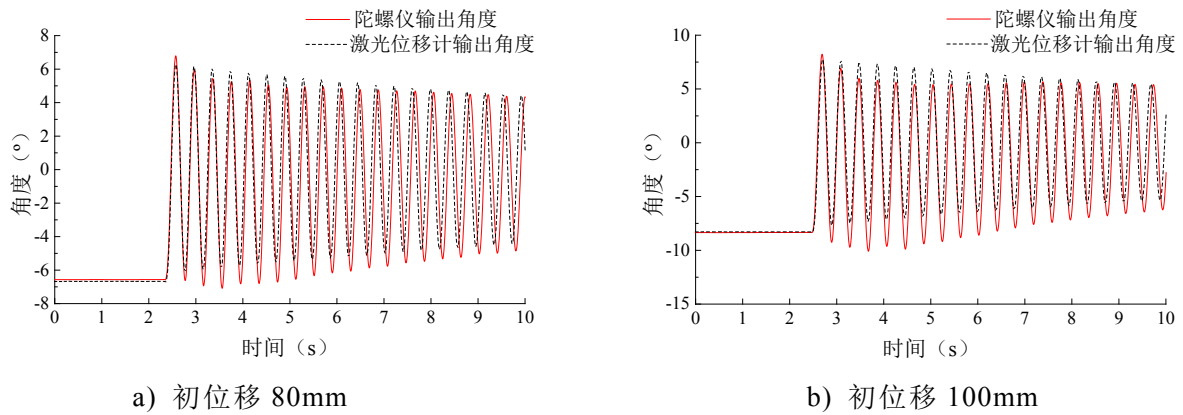
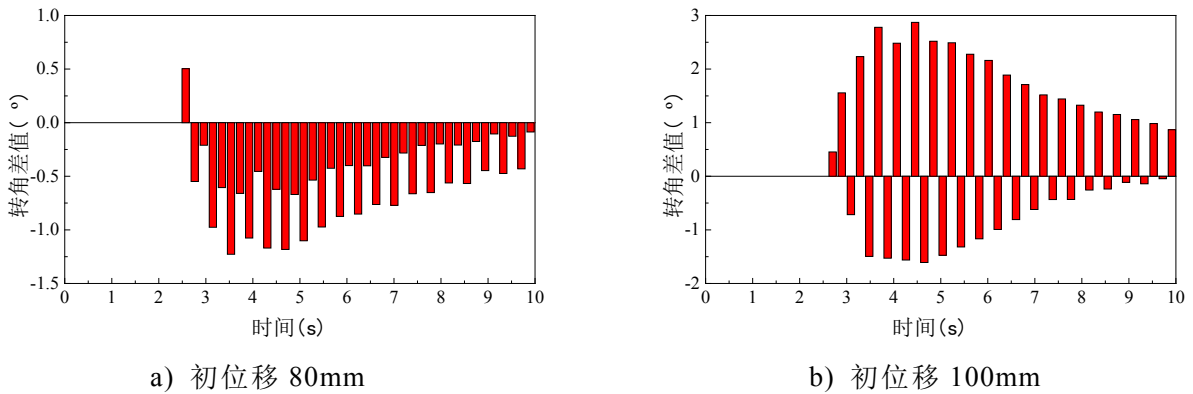


图 2.36 初位移为 80mm 和 100mm 时激光位移计和 MEMS 陀螺仪传感器所测转角响应对比



注：转角差值=陀螺仪传感器测得角度-激光位移计拟合转角。

图 2.37 初位移为 80mm 和 100mm 时柱的转角响应在波峰波谷处的相对差值

## 2.5 本章小结

本章对市场上现有的 MEMS 陀螺仪传感器进行了调研，介绍了 HWT901B 陀螺仪传感器的基本工作原理。为了校验该传感器在受到外界冲击振动下的动态精度，首先依据由平动响应信息拟合转动响应的原理，对忽略剪切变形和转动惯量的影响的悬臂梁模型进行了两种工况下的数值模拟，分别为受到集中荷载和受脉

冲激励。验证了角度拟合方法的可行性。然后以门式钢框架结构的柱构件为试验对象，验证了 MEMS 陀螺仪传感器的静态精度和动态精度。

## 第3章 基于动转角测量技术的结构物理参数时域识别

### 3.1 引言

结构动力测试方法应用于实际工程时，难以准确测量结构的转角信息，转角自由度也通常容易被忽略。由于转角响应难以获得，目前结构识别算法的研究主要集中于剪切型结构和桁架结构<sup>[51,118,119]</sup>，而以弯剪变形为主的结构研究较少。弯剪型结构在正问题分析中通常利用静力凝聚的方法缩聚掉转角自由度，在反问题求解过程中，主要利用平动响应重构转动响应。在时域识别方面，传统算法在重构状态信息以及广义逆求转角时，计算模型所使用的方程式存在对冲效应，需要应用超定方程组修正结果，方法过于复杂且精度不能完全满足要求。

本章以一座4层框架结构为例，在对该结构进行转角信息重构的前提下，基于最小二乘递推算法由结构的平动响应数据在时域内识别了结构的物理参数。对比运用转角真实值的情形下所识别的物理参数，研究使用转角重构值对结构物理参数时域识别的影响。在第二章对动力试验条件下MEMS陀螺仪传感器的角度测量精度进行验证的基础上，通过一个3层2跨的钢框架模型的动力试验，比较了采用广义逆方法重构转角和直接测量转角两种情况下，阻尼参数和刚度参数的识别效果。此外，还研究了转角信息补充后，使用最小二乘递推算法进行损伤诊断的效果。

### 3.2 基于最小二乘递推算法的结构物理参数识别

#### 3.2.1 结构计算模型的选取

对于结构识别来说，计算模型的选取十分关键。由于实际工程结构的模型自由度较多，难以对所有自由度的响应信息进行测量。因此，对于多自由度结构系统的识别问题，目前所采用的结构模型大多为简化计算模型，简化后的模型应真实反映结构中所有构件的主要受力性能。本文研究的对象为平面钢框架结构，框架结构是由梁、柱构件组成的结构，当横梁与柱的线刚度比值大于5，则在结构分析中，可假定横梁刚度无穷大，忽略梁的变形，视为剪切型结构<sup>[120]</sup>。若框架结构的梁与柱刚度相差不大时可视为弯剪型框架结构。剪切型框架的参数识别已经比较成熟，因此本文将对弯剪型框架结构进行研究，在水平荷载作用下，其框架节点将发生转动，所以需要考虑框架节点转动的影响。

平面框架结构的完整自由度模型如图3.1(a)所示，其含 $2N$ 个平动自由度和 $2N$ 个转动自由度。对于平面框架结构的梁柱连接节点，节点的轴向变形和剪切变

形与节点的转动变形相比，可以忽略不计，因此平面框架结构计算模型采用的梁单元刚度矩阵为  $4 \times 4$  阶矩阵，具体表示如下：

$$K = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & -EA/l & 0 \\ 0 & EI/l & 0 & 2EI/l \\ -EA/l & 0 & EA/l & 0 \\ 0 & 2EI/l & 0 & 4EI/l \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

上式中， $E$  为单元材料的弹性模量， $A$  为单元的横截面面积， $I$  为单元横截面对主轴  $Z$  的惯性矩， $l$  为单元的长度。

对于单跨平面框架结构，由于结构对称，在水平荷载作用下，左右两侧的转动响应一致，可将模型一简化为图 3.1(b) 如所示的含  $N$  个平动自由度和  $N$  个转动自由度的模型二。

对于多跨平面框架结构，同一层梁柱节点的转角响应并不完全相同，根据实际情况，可将模型一简化为如图 3.1(c) 所示的含  $N$  个平动自由度和  $2N$  个转动自由度的模型三。

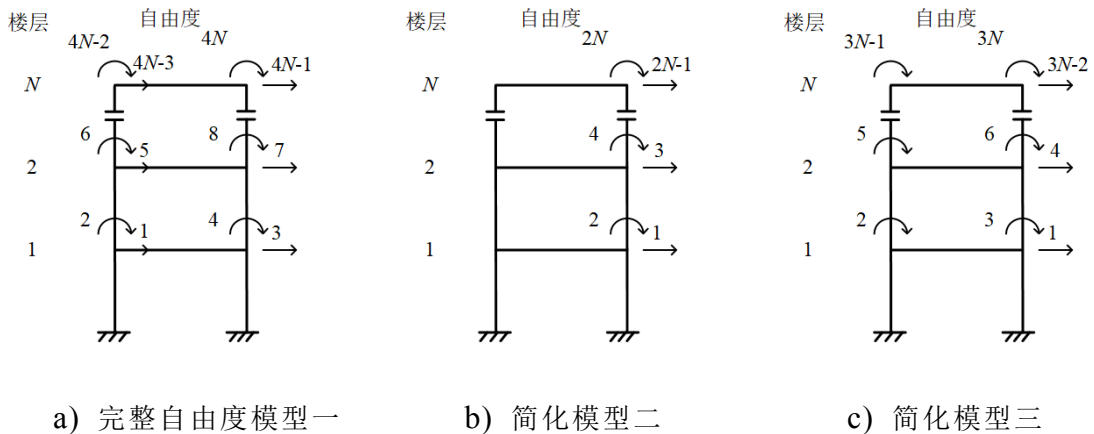


图 3.1 平面框架结构的计算模型

### 3.2.2 最小二乘递推算法

系统识别是基于系统的输入、输出观测数据，从一组给定模型类中确定一个与所测系统等价的数学模型<sup>[121]</sup>。结构物理参数识别常用的准则包括：最小二乘准则、贝叶斯估计准则、最大似然估计准则、预报误差准则等。本文的研究采用实际应用中广泛的最小二乘估计准则。最小二乘法在 1794 年由数学家高斯提出<sup>[122]</sup>，先后形成了经典最小二乘法、加权最小二乘法、最小二乘递推法、遗忘因子法和增广最小二乘法等多种改进算法<sup>[76]</sup>。这些算法在一定程度上考虑了测试噪声、方程性态对识别结果的影响。

以单自由度系统为例，设系统的输入输出关系如下：

$$z_k = h_k \theta + n_k \quad (3.2)$$

式中， $z_k$  和  $h_k$  分别表示系统的输入和输出， $\theta$  表示系统的待识别参数， $n_k$  为均值是零的随机噪声。

则有如下所示的参数  $\theta$  的最小二乘估计准则：

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N (z_k - h_k \theta)^2 \rightarrow \min \quad (3.3)$$

上述准则可以理解为，待识别参数  $\theta$  最可能的值将使实际观测值与计算值之间的误差累积平方和最小。当观测的数据长度足够长， $N \rightarrow \infty$  时，参数的估计值将以概率收敛于精确真值  $\theta^{[65]}$ 。

对于线性参数系统，其输入输出模型可表示为<sup>[65]</sup>：

$$Z = H\theta + e \quad (3.4)$$

其中， $Z$  为系统模型的输出向量， $H$  为模型输入或输出变量的等价表达式， $\theta$  为待识别的未知模型参数， $e$  为模型的噪声向量。根据式 (3.3) 的最小二乘法准则，由极值定理有：

$$\left. \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (Z - H\theta)^T (Z - H\theta) \right] \Big|_{\hat{\theta}} = 0 \quad (3.5)$$

进一步整理可以得到：

$$(H^T H) \hat{\theta} = H^T Z \quad (3.6)$$

当  $H^T H$  矩阵可逆时，可以得到：

$$\hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T Z \quad (3.7)$$

又因为：

$$\left. \frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = 2H^T H \quad (3.8)$$

因此矩阵  $H^T H$  正定，故：

$$\left. \frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}} > 0 \quad (3.9)$$

满足式(3.9)的参数估计值  $\hat{\theta}$  必然使得  $J(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}} = \min$  成立，而且  $\hat{\theta}$  估计值唯一，此时的  $\hat{\theta}(k)$  被称为经典最小二乘估计<sup>[65]</sup>。

根据式 (3.7) 直接计算参数估计值的算法为一次完成型算法，当观测数据增多时，计算工作量将迅速增加。因此，有必要引入递推型算法，将式 (3.7) 转化为递推计算的格式。参数递推估计是指对被识别的系统，每获得一次新的测量数据后，就在前一次的估计结果的基础上，利用新引入的测量数据对前一次估计的结果进行修正，从而递推得到新的参数估计值。这样不断引入新的测量数据，一

次接一次进行参数估计，直至估计值达到满意的精确程度为止，最小二乘递推算的思想可以用下式来概括：

$$\text{当前估计值 } \hat{\theta}(k) = \text{上次估计值 } \hat{\theta}(k-1) + \text{修正项}$$

新的估计值  $\hat{\theta}(k)$  是基于旧估计值  $\hat{\theta}(k-1)$ ，利用新的观测数据对旧估计值进行修正所得<sup>[122]</sup>。设：

$$P_k^{-1} = H_k^T H_k = \sum_{i=1}^k a_i h_i^T h_i \quad (3.10)$$

$$P_{k-1}^{-1} = H_{k-1}^T H_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i h_i^T h_i \quad (3.11)$$

$$Z_k = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T \quad (3.12)$$

$$Z_{k-1} = (z_1, z_2, \dots, z_{k-1})^T \quad (3.13)$$

其中， $a_i$  为加权因子，在最小二乘递推算法中恒取 1。由式 (3.7) 有：

$$\hat{\theta}_k = (H_k^T H_k)^{-1} H_k^T Z_k = P_k H_k^T Z_k = P_k \sum_{i=1}^{k-1} a_i h_i^T z_i \quad (3.14)$$

$$\hat{\theta}_{k-1} = (H_{k-1}^T H_{k-1})^{-1} H_{k-1}^T Z_{k-1} = P_{k-1} H_{k-1}^T Z_{k-1} = P_{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} a_i h_i^T z_i \quad (3.15)$$

根据上述定义，可得下述递推关系：

$$P_k^{-1} = P_{k-1}^{-1} + a_k h_k^T h_k \quad (3.16)$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + a_k P_k h_k^T (z_k - h_k \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.17)$$

定义增益矩阵：

$$K_k = a_k P_k h_k^T \quad (3.18)$$

则式 (3.17) 可写为：

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k (z_k - h_k \hat{\theta}_{k-1}) \quad (3.19)$$

此即为参数估计的递推格式，式 (3.188) 中的矩阵  $P_k$  的对角线上的元素反映了参数估计值与真实值的均方误差，被称为误差协方差矩阵<sup>[65]</sup>。由式 (3.16) 和矩阵求逆公式可得：

$$P_k = P_{k-1}^{-1} - P_{k-1}^{-1} h_k^T \left( h_k P_{k-1}^{-1} h_k^T + \frac{1}{a_k} \right)^{-1} h_k P_{k-1} \quad (3.20)$$

将上式代入增益矩阵 (3.18) 中, 可得:

$$K_k = P_{k-1} h_k^T \left( h_k P_{k-1} h_k^T + \frac{1}{a_k} \right)^{-1} \quad (3.21)$$

式 (3.19)、式 (3.20) 和式 (3.21) 组成了最小二乘估计的递推算法。当最小二乘递推算法的参数估计达到一定精度时, 可以自动停止递推运算, 可选用如下的停机准则:

$$\max_{\hat{\theta}_i} \left| \frac{(\hat{\theta}_i)_k - (\hat{\theta}_i)_{k-1}}{(\hat{\theta}_i)_{k-1}} \right| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ 为适当小的正数}) \quad (3.22)$$

### 3.2.3 基于最小二乘递推算法的结构物理参数时域识别

对于需要考虑节点转动影响的框架结构, 在外力  $f(t)$  作用下, 对于需要考虑节点转动影响的框架结构, 动力平衡方程为:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{x\varphi} \\ M_{\varphi x} & M_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_x \\ \ddot{x}_\varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{x\varphi} \\ C_{\varphi x} & C_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_x \\ \dot{x}_\varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{x\varphi} \\ K_{\varphi x} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_x \\ x_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

其中,  $x_x$ 、 $\dot{x}_x$ 、 $\ddot{x}_x$  分别为结构的水平位移, 速度, 加速度响应。  $x_\varphi$ 、 $\dot{x}_\varphi$ 、 $\ddot{x}_\varphi$

分别为结构的角位移, 角速度, 角加速度,  $f(t)$  为外部激励。  $\begin{bmatrix} M_{xx} & M_{x\varphi} \\ M_{\varphi x} & M_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{x\varphi} \\ C_{\varphi x} & C_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$ 、

$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{x\varphi} \\ K_{\varphi x} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$  分别为协调质量矩阵, 阻尼矩阵和刚度矩阵。假设阻尼矩阵仅与刚度

矩阵成比例,  $[C]=b[K]$ 。

假定质量矩阵已知, 展开动力平衡方程后有:

$$M_{xx}\ddot{x}_x + M_{x\varphi}\ddot{x}_\varphi + bK_{xx}\dot{x}_x + bK_{x\varphi}\dot{x}_\varphi + K_{xx}x_x + K_{x\varphi}x_\varphi = f_{(t)} \quad (3.24)$$

$$M_{\varphi x}\ddot{x}_x + M_{\varphi\varphi}\ddot{x}_\varphi + bK_{\varphi x}\dot{x}_x + bK_{\varphi\varphi}\dot{x}_\varphi + K_{\varphi x}x_x + K_{\varphi\varphi}x_\varphi = 0 \quad (3.25)$$

根据虚拟结构向量转换方法<sup>[65]</sup>, 可构造参数识别的标准方程。将 (3.24) 式简化为:

$$\tilde{M}\ddot{X} + b\tilde{K}\dot{X} + \tilde{K}X = f_{(t)} \quad (3.26)$$

上式中,  $\tilde{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{x\varphi} \\ M_{\varphi x} & M_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{x\varphi} \\ K_{\varphi x} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$ ,  $\ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_x & \ddot{x}_\varphi \end{bmatrix}^T$ ,  $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_x & \dot{x}_\varphi \end{bmatrix}^T$ ,  $X = \begin{bmatrix} x_x & x_\varphi \end{bmatrix}^T$ 。

令:

$$\hat{K} = \sum_{i=1}^n T_{ki}^T k_i T_{ki} = \sum_{i=1}^n \theta_{ki} T_{ki}^T \mathcal{K}_i T_{ki} \quad (3.27)$$

式 (3.27) 中,  $T_{ki}$  为定位矩阵,  $k_i$  为局部坐标下的单元刚度矩阵,  $\theta_{ki}$  为待识别的刚度参数,  $\mathcal{K}_i$  为提取公因子  $\theta_{ki}$  之后的单刚矩阵。

$$\text{引入 } R_{ki} = T_{ki}^T \mathcal{K}_i T_{ki}$$

则有:

$$\hat{K}x = H_k \theta_k \quad (3.28)$$

其中:

$$H_k = [R_{k1}, R_{k2}, \dots, R_{kn}]; \quad \theta_k = [\theta_{k1}, \theta_{k2}, \dots, \theta_{kn}]^T$$

类似地, 对于阻尼矩阵有:

$$b\hat{K}x = H_c \theta_c \quad (3.29)$$

对于协调质量矩阵有:

$$M\ddot{x} = H_m \theta_m \quad (3.30)$$

其中:

$$H_m = [R_{m1}, R_{m2}, \dots, R_{mn}]; \quad \theta_m = [\theta_{m1}, \theta_{m2}, \dots, \theta_{mn}]^T$$

$$\text{而 } R_{mi} = T_{mi}^T \hat{m}_i T_{mi}$$

以上所述表达式中,  $\theta_{mi}$  为待识别的单元质量参数,  $\hat{m}_i$  为标准化单元质量矩阵,  $T_{mi}$  为关于质量的单元坐标转换矩阵与整体定位矩阵的乘积。

将式 (3.28)、式 (3.29)、式 (3.30) 代入式 (3.26), 并引入  $H = [H_m, H_c, H_k]$ ,  $\theta = [\theta_m, \theta_c, \theta_k]^T$ ,  $Z = f(t)$ 。即可写成如下的参数识别标准格式:

$$H\theta = Z \quad (3.31)$$

其中,  $H$  为结构响应矩阵,  $\theta$  为待识别的参数向量,  $Z$  为系统输入。假定结构系统的输入及输出信息完备, 基于最小二乘准则, 可得式 (3.31) 中的结构参数  $\theta$  的估计值为:

$$\tilde{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T Z \quad (3.32)$$

上述论述表明: 利用系统的输入、输出响应信息可以得到结构的物理参数估计值。

### 3.2.3.1 无转角测量信息的结构物理参数识别——转角信息重构

以相对简单的单跨框架结构为例说明, 对于转角响应无法直接测量的情况, 为了进行 (3.32) 式的计算, 可采用广义逆理论<sup>[123]</sup>由水平位移测量值计算转角, 计算模型选取模型二。

忽略转角方向上的惯性力和阻尼力的作用, 则由式 (3.25) 可得

$$K_{\varphi x} x + K_{\varphi\varphi} \varphi = 0 \quad (3.33)$$

解上式可得:

$$x_{\varphi} = -K_{\varphi\varphi}^{-1} K_{\varphi x} x \quad (3.34)$$



由于该式中的  $K_{\phi x}$  和  $K_{\phi\phi}$  包含有未知参数, 因此无法直接用来计算转角响应。对于这一问题, 可以通过广义逆方法计算转角<sup>[123]</sup>。结构的总刚度矩阵是由结构各单元的单元刚度矩阵叠加而成, 如式 (3.35) 所示:

$$K = \sum_{i=1}^n b_i \tilde{K}_i \quad (3.35)$$

其中,  $b_i$  为单元  $i$  提取的待识别参数, 为提取  $b_i$  后单元  $i$  整体坐标系中的单元刚度贡献矩阵。同时对于总刚度矩阵的各分块矩阵同样有:

$$K_{xx} = \sum_{i=1}^n b_i \tilde{K}_{xx}^{(i)} \quad K_{x\phi} = \sum_{i=1}^n b_i \tilde{K}_{x\phi}^{(i)} \quad (3.36a)$$

$$K_{\phi x} = \sum_{i=1}^n b_i \tilde{K}_{\phi x}^{(i)} \quad K_{\phi\phi} = \sum_{i=1}^n b_i \tilde{K}_{\phi\phi}^{(i)} \quad (3.36b)$$

将式 (3.36) 代入式 (3.33), 可得:

$$\left( \sum_{i=1}^n b_i \tilde{K}_{\phi x}^{(i)} \right) x_x + \left( \sum_{i=1}^n b_i \tilde{K}_{\phi\phi}^{(i)} \right) x_\phi = 0 \quad (3.37)$$

定义:

$$H(b) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (3.38)$$

$$\tilde{K}(\phi x) = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11}^{(1)}(\phi x) & \tilde{K}_{12}^{(1)}(\phi x) & \cdots & \tilde{K}_{1n}^{(1)}(\phi x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{K}_{11}^{(n)}(\phi x) & \tilde{K}_{12}^{(n)}(\phi x) & \cdots & \tilde{K}_{1n}^{(n)}(\phi x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{K}_{n1}^{(1)}(\phi x) & \tilde{K}_{n1}^{(1)}(\phi x) & \cdots & \tilde{K}_{nm}^{(1)}(\phi x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{K}_{n1}^{(n)}(\phi x) & \tilde{K}_{n1}^{(n)}(\phi x) & \cdots & \tilde{K}_{nm}^{(n)}(\phi x) \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (3.39)$$

式中  $m=n^2$ ,  $\tilde{K}_{jk}^{(i)}(\phi x)$  为结构第  $i$  个部分的刚度矩阵  $\tilde{K}_{\phi x}^{(i)}$  的第  $j$  行  $k$  列元素, 同理可定义  $\tilde{K}(\phi\phi)$ 。由上述定义, 式 (3.37) 可写为:

$$H(b) \underline{\tilde{K}(\phi x)} x_x = -H(b) \underline{\tilde{K}(\phi\phi)} x_\phi \quad (3.40)$$

根据矩阵分析的广义逆理论, 取上式中划线部分相等, 则有:

$$x_\phi = -\underline{\tilde{K}(\phi\phi)}^+ \underline{\tilde{K}(\phi x)} x_x \quad (3.41)$$

该式中已不含待求参数  $b_i$ , 且式右各项均已知, 因此可根据式 (3.41) 由结构水平位移测量值计算结构的转角测量值。对其两边求一阶导数得:

$$\dot{x}_\phi = -\underline{\tilde{K}(\phi\phi)}^+ \underline{\tilde{K}(\phi x)} \dot{x}_x \quad (3.42)$$

上式为位移一角速度关系式, 同理可得位移一角加速度关系式:

$$\ddot{x}_\phi = -\underline{\tilde{K}(\phi\phi)}^+ \underline{\tilde{K}(\phi x)} \ddot{x}_x \quad (3.43)$$

由平动信息重构角度，角速度，角加速度信息后，可进行结构的参数识别。

### 3.2.3.2 有转角测量信息的结构物理参数识别

对于可以直接测量转角值的框架结构，同样以模型二为例说明，选取的待识别参数为各层的层抗弯刚度 $(EI)_i$ 和各层的阻尼参数 $b(EI)_i$ 。根据前述理论介绍，可构造如式(3.31)所示的方程，第 $i$ 层和第 $i+1$ 层的参数识别方程如下式：

$$[H_{i1} \quad H_{i2} \quad H_{i3} \quad H_{i4}] \begin{Bmatrix} b(EI)_i \\ b(EI)_{i+1} \\ (EI)_i \\ (EI)_{i+1} \end{Bmatrix} = \{Z_i\} \quad (3.44)$$

当 $i > 1$ 时，其中：

$$H_{i1} = -\frac{24}{h_i^3} \dot{x}_{2i-3} + \frac{12}{h_i^2} \dot{x}_{2i-2} + \frac{24}{h_i^3} \dot{x}_{2i-1} + \frac{12}{h_i^2} \dot{x}_{2i} \quad (3.45)$$

$$H_{i2} = \frac{24}{h_{i+1}^3} \dot{x}_{2i-1} - \frac{12}{h_{i+1}^2} \dot{x}_{2i} - \frac{24}{h_{i+1}^3} \dot{x}_{2i+1} - \frac{12}{h_{i+1}^2} \dot{x}_{2i+2} \quad (3.46)$$

$$H_{i3} = -\frac{24}{h_i^3} x_{2i-3} + \frac{12}{h_i^2} x_{2i-2} + \frac{24}{h_i^3} x_{2i-1} + \frac{12}{h_i^2} x_{2i} \quad (3.47)$$

$$H_{i4} = \frac{24}{h_{i+1}^3} x_{2i-1} - \frac{12}{h_{i+1}^2} x_{2i} - \frac{24}{h_{i+1}^3} x_{2i+1} - \frac{12}{h_{i+1}^2} x_{2i+2} \quad (3.48)$$

$$Z_{2i-1} = f_{2i-1} - [M]_{(\text{第}2i-1\text{行})} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{2i+2} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

其中， $h_i$ 为第 $i$ 层层高。当识别第 $i=1$ 层时，

$$H_{11} = \frac{24}{h_1^3} \dot{x}_1 + \frac{12}{h_1^2} \dot{x}_2 \quad (3.50)$$

$$H_{12} = \frac{24}{h_2^3} \dot{x}_1 - \frac{12}{h_2^2} \dot{x}_2 - \frac{24}{h_2^3} \dot{x}_3 - \frac{12}{h_2^2} \dot{x}_4 \quad (3.51)$$

$$H_{13} = \frac{24}{h_1^3} x_1 + \frac{12}{h_1^2} x_2 \quad (3.52)$$

$$H_{14} = \frac{24}{h_2^3} x_1 - \frac{12}{h_2^2} x_2 - \frac{24}{h_2^3} x_3 - \frac{12}{h_2^2} x_4 \quad (3.53)$$

$$Z_1 = f_1 - m_{11} \ddot{x}_1 - m_{12} \ddot{x}_2 - m_{13} \ddot{x}_3 - m_{14} \ddot{x}_4 \quad (3.54)$$

在已知框架结构的各层层高、质量矩阵、所受外激励以及各节点的平动时程响应和转动时程响应的前提下，首先将以上信息代入式(3.45)~(3.54)，然后将式(3.45)~(3.54)代入式(3.44)，建立参数识别标准方程进行最小二乘递推

法参数识别，即可求得结构的物理参数。有转角测量信息时，识别结构物理参数的过程中可省去采用广义逆方法重构转角信息的过程，更为方便。

### 3.2.4 算例分析

以一个 4 层弯剪型框架结构为例，在结构左侧顶点水平施加一个幅值为 100N 的脉冲力  $F$ ，采样频率设为 200Hz，共采集 12000 个数据点。使用 matlab 编程计算，计算模型如图 3.2 所示，假设参数如表 3.1 所示。采用 Newmark- $\beta$  时程分析方法进行正问题计算得到结构的动力响应。动力方程中采用与刚度相关的比例阻尼矩阵和协调质量矩阵。采用忽略轴向变形和剪切变形的  $4 \times 4$  阶的杆系单元刚度矩阵，组装成  $16 \times 16$  阶的总刚度矩阵。模型共 16 个自由度，由于结构完全对称，可简化为含 4 个平动自由度和 4 个转动自由度的框架模型。则总刚度矩阵变为  $8 \times 8$  阶的矩阵。为了验证算法的抗噪性能，在结构响应的分析中分别加入 1%、5% 的白噪声，加入白噪声的水平由结构响应的均方根值和噪声均方根值的百分比确定。接着使用最小二乘递推算法对 1~4 层的层间抗弯刚度  $K_1$ 、 $K_2$ 、 $K_3$ 、 $K_4$  和各层的刚度阻尼参数  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  进行识别。

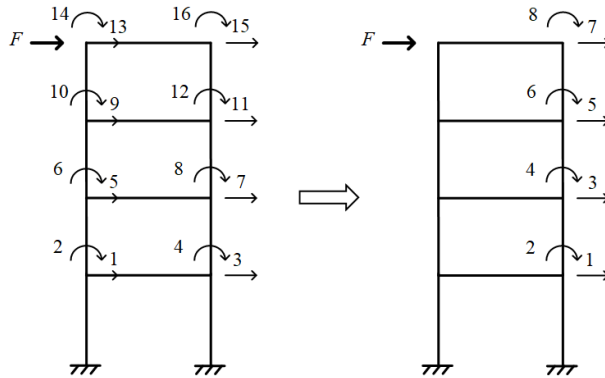


图 3.2 弯剪型框架结构模型

表 3.1 四层框架结构参数真实值

层号	层间抗弯刚度 (N/m)	层刚度阻尼参数 (N·s/m)	层高 (m)
1	23.1750	0.0487	3.6
2	23.1750	0.0487	3.0
3	23.1750	0.0487	3.0
4	23.1750	0.0487	3.0

根据实际观测输出信息，设置通过广义逆方法重构转角的工况 1 和采用转角真实值的工况 2。其中输出的加速度响应和角度、角速度响应都采用真实值。

工况 1：采用 Newmark- $\beta$  积分法计算结构上 4 个平动自由度的加速度响应，对加速度响应进行傅里叶变换，将信号从时域转换到频域，再通过将时域内的积分转换为频域计算，在频域内进行运算后再通过傅立叶逆变换将信号从频域还

原到时域，并取其实部就可以得到信号在时域的速度和位移响应<sup>[124]</sup>，采用 3.2.3 节所述广义逆方法，根据式 (3.41)、(3.42) 和 (3.43) 由位移响应重构角度，角速度，角加速度响应。

工况 2：基于图 3.2 的计算模型，采用 Newmark- $\beta$  积分法计算结构上 4 个平动自由度的加速度响应，4 个转动自由度的角度、角速度响应。然后，同工况 1 的方法由频域积分法获得速度和位移响应。对角速度响应利用向前差分的数值微分法重构角加速度的响应，初始角速度为 0。

获得完备的输入和输出响应信息后，假设结构的待识别参数初值，将以上数据和结构的已知参数代入公式 (3.44) 构造结构参数识别方程，根据式 (3.32) 运用最小二乘递推算法可求出结构物理参数的识别值，参数识别结果列入表 3.2，图 3.3 为不考虑噪声下，工况 1 和工况 2 识别结构物理参数的收敛过程。

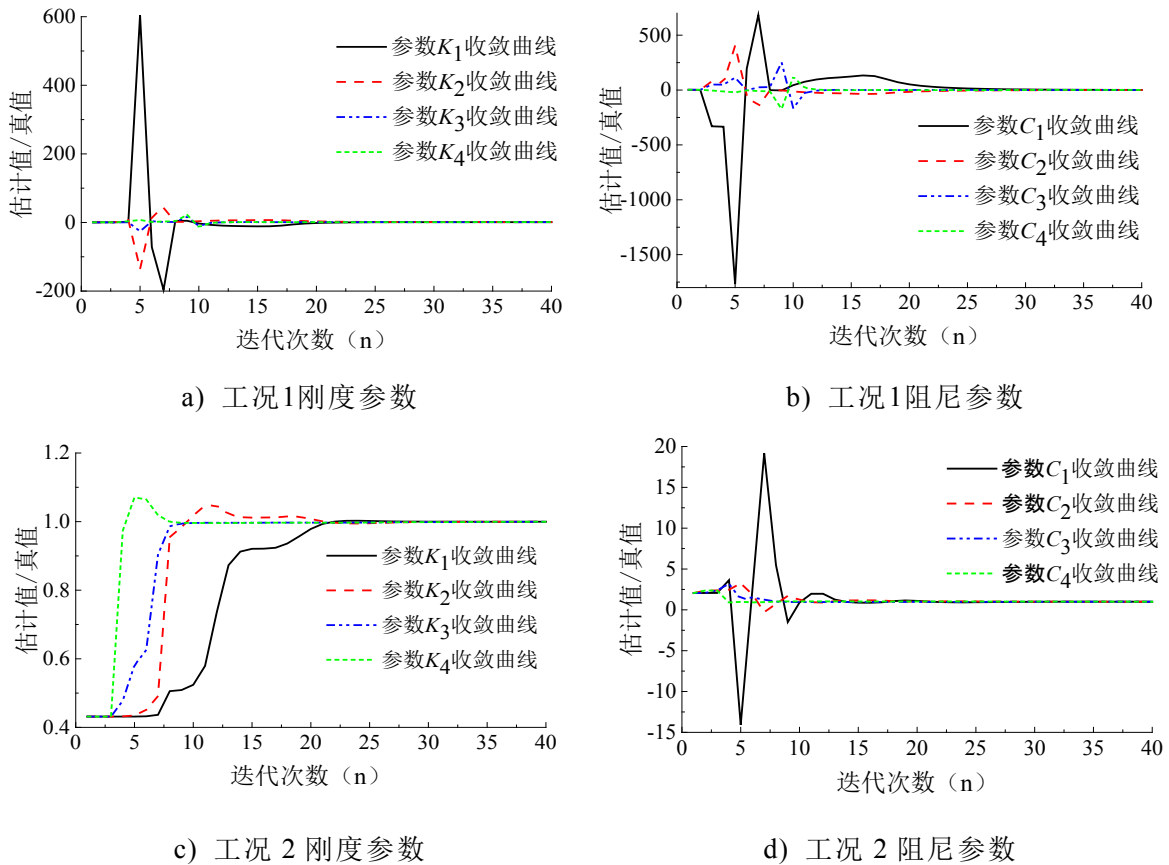


图 3.3 工况 1 与工况 2 的刚度参数与阻尼参数估计收敛过程

比较工况 1 和工况 2 在无噪声时的结构参数识别结果，可以发现工况 1 重构转角响应时刚度参数识别的最大误差为 13.04%；而工况 2 将转角信息作为重要信息补充，识别得到的刚度参数最大误差为 0.06%，提高了识别的参数精度。说明通过广义逆方法由平动响应重构出的角度、角速度和角加速度响应准确度不高，基于最小二乘递推算法进一步进行识别的刚度参数结果也不够理想。从识别的物