

学校代号 10532

学 号 S1401W0078

分 类 号 TU317+.1

密 级 公开



湖南大学  
HUNAN UNIVERSITY

## 工程硕士学位论文

# 基于加速度和应变信号 的移动荷载识别

学位申请人姓名 陈松柏

培 养 单 位 土木工程学院

导师姓名及职称 周云副教授 杨博铭高工

学 科 专 业 建筑与土木工程

研 究 方 向 结构识别和健康监测

论文提交日期 2017年06月01日

学校代号：10532  
学 号：S1401W0078  
密 级：公开

湖南大学工程硕士学位论文

# 基于加速度和应变信号的 移动荷载识别

国家自然科学基金青年基金（51208190）

国家重点研发计划（2016YFC0701308, 2016YFC0701400）

学位申请人姓名：陈松柏  
导师姓名及职称：周云副教授 杨博铭高工  
培 养 单 位：土木工程学院  
专 业 名 称：建筑与土木工程  
论文提交日期：2017年06月01日  
论文答辩日期：2017年06月04日  
答辩委员会主席：易伟建教授

# Moving force identification based on acceleration and strain signal

by

CHEN Songbai

B.E. (Hunan University of Science and Technology) 2013

A thesis submitted in partial satisfaction of the

Requirements for the degree of

Master of Engineering

in

Architecture and civil engineering

in the

Graduate School

of

Hunan University

Supervisor

Associate Professor ZHOU Yun & Senior Engineer YANG Boming

June, 2017

# 湖南大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：陈松柏

日期：2017年6月4日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权湖南大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

- 1、保密 ，在 \_\_\_\_\_ 年解密后适用本授权书。
- 2、不保密 。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：陈松柏

日期：2017年6月4日

导师签名：

日期：2017年6月4日

傅博

## 摘 要

在桥梁健康监测的研究中，桥梁上通过的移动荷载大小是影响桥梁使用寿命的一个重要因素，基于桥梁的动力响应进行移动荷载识别属于第二类反问题的范畴，本文在总结现有移动荷载识别方法的基础上，研究了通过重构动位移信号的方法来识别移动荷载，具体的研究内容如下：

(1) 总结了目前国内外的学者在移动荷载识别方面所取得的成果，归纳了在原有的 IMI、IMII、TDM 和 FTDM 的四种识别方法上进行改进和优化的荷载识别算法，通过研究荷载识别误差产生的原因，提出采用数字信号处理的方法对含噪声的信号进行先优化后求解，以达到减小识别误差的目的。

(2) 将桥梁上由移动荷载作用引起的动位移信号分解成为静力荷载部分引起的静力位移和惯性力引起的振动位移，静力位移利用应变信号获得，对应变信号进行经验模态分解，通过去除高频部分，留下低频部分得到静力引起的应变时程曲线，再通过最小二乘法求解梁的曲率函数，利用曲率与竖向位移的关系得到静力引起的竖向位移；对于振动位移部分，利用加速度信号在频域进行二次积分的方法可以得到，积分前需要先对信号进行降噪优化，每一次积分过后根据平衡条件去除积分趋势项；最后通过静力位移和振动位移两部分的结果实现位移信号的重构，数值算例和试验的结果表明，该方法能够较为准确地获得结构的动位移。

(3) 对比了基于 MATLAB 的时域积分算法和频域积分算法，发现频域积分算法在多次运算去趋势项后仍能保证积分的精度，信号在积分过程中产生的趋势项可以通过最小二乘法拟合的方式去除。利用一组由多个正弦的叠加信号进行数字降噪的分析，对自适应降噪的效果进行了研究，当滤波阶数和步长因子取值合理的时候，该算法能够得到稳定且还原度高的信号，降噪后的信号能够满足积分目标的要求。

(4) 进行了一个简支梁的试验室试验，试验分为结构的模态试验和移动荷载试验两个部分，通过模态试验获取了结构的动力特性，并对结构的刚度值进行了标定；移动荷载试验中测量了不同的车速和荷载作用下各个测点的动力响应，其中应变响应分解后用于识别静力位移，加速度信号降噪后二次积分算得振动位移，将重构后的位移和实测动位移进行对比，发现二者的吻合度非常好，通过三个测点的位移重构信号进行了移动荷载识别，无论是 IMII 还是 TDM 方法，都可以准确识别出不同工况下的移动荷载，通过降噪恢复的信号对于提高荷载识别的精度具有一定的帮助。

**关键词：**移动荷载识别；加速度信号；应变信号；频域积分；信号分解与重构

## Abstract

In the research of bridge health monitoring, moving loads on bridges is an important factor to influence the life of the bridge, moving load identification belongs to the second category of inverse problems based on the dynamic response of bridge. In this paper, based on the summary of the moving load identification methods proposed by domestic and foreign scholars, the method of reconstructing the dynamic displacement is used to identify the moving load, specific research contents are as follows:

(1) The achievements of the research about the identification of moving loads are summarized, four kinds of identification methods of IMI、IMII、TDM and FTDM are summarized, which are improved and optimized, based on the research of the causes of load identification error, the method of digital signal reconstruction is proposed to solve the problem of noise signal in order to reduce the recognition error.

(2) For the displacement signal on the bridge caused by moving loads, which is decomposed into static load caused by part of the static displacement and inertial force caused by vibration displacement, the static displacement can be obtained by using empirical mode decomposition by strain signal, after removing the high frequency part of the strain history curve, the low-frequency part can be regard as static strain response, the least squares method is used to solve the beam, the relationship between curvature and vertical displacement of the vertical displacement caused by static displacement; For the vibration displacement part, the frequency domain integral method is used to obtain the signal, and the signal noise reduction is needed before integration. Finally, the displacement signal is reconstructed by the two parts of the static displacement and the vibration displacement. The numerical example and the experimental results show that the method can obtain the dynamic displacement of the structure accurately.

(3)Comparing the time domain integral algorithm and frequency-domain integral algorithm, frequency domain integral algorithm in several times to the trend still can guarantee the integral precision, the trend signal generated in the integration process can be removed by the least squares fitting method. By using a set of superimposed signals of multiple sinusoidal digital noise reduction analysis of adaptive noise reduction effect was studied when the convergence factor of reasonable value, the algorithm can get stable and high degree of reduction of signal, the signal after de-

noising can meet the requirements to achieve the integration of the target.

(4) A simple test for verification, the test is divided into two parts, include a modal test of the whole structure and a moving load test, the dynamic characteristics of the structure were obtained by modal test, and the structure stiffness values were calibrated; test of moving loads were measured in different speed and load each measuring point of the dynamic response, the strain response after decomposition is used to identify the static displacement, the vibration displacement is integral noise acceleration signal after two times, compared with the measured displacement and reconstructed dynamic displacement, it is found that the curves fit very well, the displacement signal reconstruction from three points of the moving load identification. Either the IMII or TDM method can accurately identify the moving load under different working conditions, the signal denoising recovery to improve the load identification accuracy has certain help.

**Key Words:** Moving load identification; Acceleration signal; Strain signal; Frequency domain integral; Signal decomposition and reconstruction

## 目 录

学位论文原创性声明和学位论文版权使用授权书 .....	I
摘要 .....	II
Abstract.....	III
<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
1.1 课题研究的意义 .....	1
1.2 移动荷载识别的研究现状 .....	2
1.2.1 国外研究现状.....	4
1.2.2 国内研究现状.....	6
1.3 移动荷载识别算法的改进方向 .....	7
1.4 本文研究的内容 .....	9
<b>第 2 章 荷载识别理论及振动方程的建立</b> .....	10
2.1 荷载分析模型 .....	10
2.1.1 移动荷载理论.....	10
2.1.2 分析方法 .....	11
2.2 荷载识别的桥梁模型 .....	12
2.2.1 离散的梁单元模型 .....	12
2.2.2 简支梁模型 .....	13
2.3 移动荷载识别方法 .....	13
2.3.1 解析法 I (IMI) .....	14
2.3.2 解析法 II(IMII).....	14
2.3.3 时域法 (TDM) .....	15
2.3.4 频域-时域法(FTDM) .....	19
2.4 本章小结.....	21
<b>第 3 章 移动荷载作用下的动位移识别</b> .....	22
3.1 基于应变的静荷载位移识别 .....	23
3.1.1 基于平均曲率识别挠曲线.....	24
3.1.2 基于最小二乘曲线识别挠曲线 .....	25
3.2 经验模态分解 .....	26
3.3 积分算法理论研究 .....	28
3.3.1 时域积分算法推演 .....	28
3.3.2 频域积分原理.....	29

3.3.3 积分算法误差评价 .....	31
3.4 信号的处理方法 .....	31
3.4.1 小波变换信号优化 .....	32
3.4.2 自适应降噪 .....	33
3.5 MATLAB 信号处理方法的实现 .....	35
3.5.1 两种积分算法的实现及对比 .....	35
3.5.2 信号降噪处理 .....	38
3.6 本章小结 .....	42
<b>第 4 章 移动荷载识别的数值模拟算例 .....</b>	<b>43</b>
4.1 不同参数对桥梁动力响应的影响 .....	44
4.1.1 车速对桥梁的影响 .....	44
4.1.2 车辆悬挂刚度对桥梁动力响应的影响 .....	46
4.1.3 各阶模态对桥梁动力响应的影响 .....	47
4.2 移动荷载识别的算例分析 .....	47
4.2.1 荷载识别误差 .....	47
4.2.2 移动荷载的识别 .....	48
4.3 本章小结 .....	56
<b>第 5 章 信号处理与荷载识别的试验研究 .....</b>	<b>57</b>
5.1 结构的动力测试 .....	57
5.1.1 试验对象 .....	57
5.1.2 试验装置 .....	58
5.1.3 试验工况 .....	59
5.1.4 试验过程及结果 .....	60
5.2 移动荷载识别试验 .....	62
5.2.1 试验装置 .....	62
5.2.2 试验测点布置和工况 .....	63
5.2.3 试验步骤 .....	64
5.2.4 试验结果 .....	65
5.2.5 本章小结 .....	76
<b>结论 .....</b>	<b>78</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>80</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>85</b>

# 第1章 绪 论

## 1.1 课题研究的意义

伴随着社会的发展和科学技术的更新迭代，人类对交通的需求越来越大，桥梁作为一种重要的交通连接枢纽在交通运输方面发挥着重要的作用，而且人们对于桥梁的需求仍在不断增加<sup>[1]</sup>。作为大家日常出行和生活中不可缺少的部分，桥梁对经济的发展也有举足轻重的地位，我国的现代桥梁发展虽然晚于美国，但我国人口总数较大且人口居住分散，加之过去存在的桥梁理论与技术不够完善，随着人们生活水平的提高，全国车流量急剧增加，导致现有的桥梁存在较大的安全隐患，同时出现了大量桥梁承载能力不足等问题，桥梁正常使用过程中缺乏必要的维护、桥梁设计时的理论与技术的不完善以及设计时过低估计实际车流量增长等因素，导致桥梁的预计 100 年设计寿命与实际的使用运营年限不相符的情况普遍发生<sup>[2]</sup>。

要使桥梁在设计使用年限内能够尽量达到预计使用年限，就必须定期进行检测和科学有效的维护保养，否则在一些特殊条件下可能会存在安全隐患以及桥梁突然破坏和坍塌的危险。根据最近几年有关部门的统计<sup>[2]</sup>，我国发生过多次重大的桥梁垮塌、侧翻等安全事故，虽然原因各不相同，但其最重要的原因之一便是缺乏有效的桥梁检测，未能及时发现问题，同时必要的维修更新及养护措施也未能落实到位。

由于桥梁安全事故的频发，使得旧桥梁的工程质量及预期寿命的问题受到学者的普遍关注，随着人们对桥梁健康状态评定及预期使用寿命研究重要性认识的提高，国内外的专家学者及工程师们开始将桥梁的研究重点移向桥梁结构的健康监测及运营阶段所存在的各种问题。目前桥梁检测的评判依据主要是根据工程积累的经验以及桥梁维护人员对桥梁长期熟悉掌握的情况，这样可能会导致他们对结构中各个构件的实际情况以及整体的健康状态缺乏准确的认识与掌握，对即将发生的变化也无法及时有效地预测和评估，进而错过了发现问题并进行维护的最佳时间，在这种情况下会使得桥梁结构损伤加重，使其应有的使用年限变短。

桥梁在运营过程中主要受到交通荷载的影响，但是车流量的快速增长和单轴重的增加使得结构更加容易疲劳<sup>[3]</sup>，加上重车通过桥梁时候的损伤累积，使得结构和构件容易损伤破坏，因此如何利用先进且可靠的技术对往来车辆的荷载进行识别，是面临的一个重大课题。

## 1.2 移动荷载识别的研究现状

随着结构动力学问题研究的深入，人们对振动问题有了更深层次的认识，与振动问题相关的研究得到了很大的发展，如结构参数识别、动荷载识别、结构的故障诊断、结构的减振与隔振、结构的动力学优化等。

在振动的研究中，通常把所研究的对象（如机器或者结构物）称为振动系统；把外界对系统的作用称为激励或输入，激励或输入不是固定的，可以随着时间发生变化，可以用时间的确定函数来描述的激励称为确定性激励，不能用时间的确定函数表示的激励称为随机激励。结构在激励作用下产生的动态行为称为响应或输出，常见的响应有结构的加速度、速度、位移以及应变响应等，振动分析就是研究系统、激励和响应之间的关系，理论上只要知道了其中的两者，就可以确定第三者<sup>[4]</sup>。

对振动系统来说，组成的三方面是紧密关联的，三个方面一起构成了一个封闭的系统<sup>[4]</sup>。同时三者也可以构成一个数学模型，当系统中有两个参量已知的时候，另一个参量通过计算可以得到确定。因此可以演变出动力学中的正反问题：当输入部分和系统特性已知，求解输出部分，此为动力学求解的正问题；当输入和输出部分已知，需要求解系统的特性（参数识别），此为动力学求解中的第一类逆问题；当系统特性和输出部分已知，需要求解输入部分（荷载识别），此为动力学中的第二类逆问题，如图 1.1 所示。

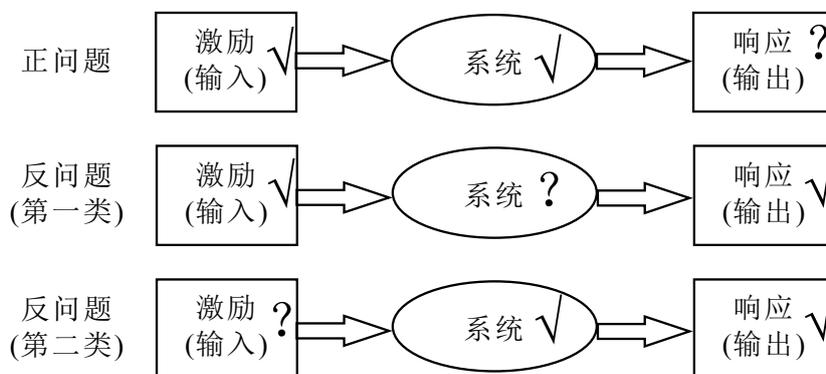


图 1.1 振动的三类问题

针对第一类反问题的研究目前已经形成了较成熟和系统的理论，并且工程中的运用也取得了非常好的效果。而第二类反问题的研究，也就是荷载识别，由于起步相对比较晚，相关的理论仍有待于进一步完善，随着科学技术的不断发展，人们对这方面的研究也越来越重视，特别是近年来，该领域已成为研究热点，越来越多的研究人员投入到该研究中来，随着研究的深入，在荷载识别理论不断完善的同时，又有很多新的问题出现。

确定移动荷载的方法主要有直接法和间接法<sup>[5]</sup>，直接法是直接测量出移动荷

载的大小或测量与荷载有关的参数来换算出荷载的大小，但是对于大多数实际工程结构，其所受的外部荷载往往很难直接测量，甚至不可能测量。基于结构实测响应反演动荷载的识别技术是确定动荷载的间接途径，即动荷载识别技术。所谓荷载识别是通过对结构响应（位移、速度、加速度或应变等）的测量，根据已知结构动态特性，识别作用在结构上的动荷载。它包含两大方面的研究内容，一是系统建模技术，二是识别方法。对于不同类型的动荷载在这两方面技术上存在着很大的差异，而研究出工程适用的建模过程和识别方法是研究的难点。

传统的移动荷载识别方法是利用地磅技术来称取车辆的轴重或总重，Moses<sup>[6]</sup>于1979年首次提出桥梁动态称重（Bridge Weigh-in-Motion）的概念，采用应变计测量车辆通过桥梁时的测点应变历程，并在路面安装车轴检测装置来记录轴数和车速等信息，再结合两者数据得到移动车辆的轴重和总重，Snyder与Moses在1992年申请了该专利<sup>[7]</sup>。1986年，澳大利亚道路研究委员会开发出CULWAY系统<sup>[8]</sup>，利用跨度小于5m的箱涵进行车辆动态称重。1997年，欧洲COST 323（WIM-LOAD）计划<sup>[9]</sup>为欧洲第一个在车辆动态称重方面的合作，颁布了《欧洲动态称重指南》，明确了动态称重系统的精度等级、使用条件、标定方法等一系列问题，认为跨径在5-15m的梁桥或涵洞为桥梁动态称重的最优选择<sup>[10]</sup>。2001年，WAVE（Weighing-in-motion of Axles and Vehicles for Europe）项目<sup>[11]</sup>对桥梁动态称重技术进行了更深入的研究和开发，扩大了桥梁动态称重技术的使用范围，并开发了商用软件SiWIM，在欧洲得到广泛应用。2001年Miao T. J.和Chan T.H.T<sup>[12]</sup>基于香港地区中小跨径桥梁近10年的WIM系统数据，建立了香港地区的车辆荷载模型并得到了车辆荷载的设计值，为香港地区的车辆荷载设计值提出了修改建议。2009年Fu G. K.和You J<sup>[13]</sup>基于WIM系统在中国采集的车辆荷载数据建立了公路车辆荷载谱，并针对中国典型公路桥梁进行可靠性分析与评估。2009年，应天益<sup>[14]</sup>利用在广东佛开高速公路为期2周的动态称重数据，分析了车重、轴重分布以及车头间距和车头时距分布规律，讨论了车流随时间的变化规律及车辆荷载的横向分布规律。2012年Zhao J.、Tabatabai H<sup>[15]</sup>基于WIM系统数据中前5%的车辆荷载，计算得到由车辆荷载产生的弯矩及剪力效应分布，用于评估规范中制定的标准车辆荷载。2014年，杨飞<sup>[16]</sup>通过对两个地区WIM数据的交通流参数特征分析，计算得到实测车辆荷载作用下中小跨径简支梁的汽车荷载效应与设计汽车荷载效应，并进行了对比分析。

BWIM系统在实际的应用中，由于外界的干扰和系统自身的原因会遇到许多的问题<sup>[17]</sup>：

#### 1. 车辆运行速度的限制

根据车速和用途的不同，BWIM系统可被分成高速、中速、低速三类。低速BWIM系统要求车辆的行驶速度低于15km/h，荷载识别的精度可达98%~99%；

在对超限车辆监督管理中一般使用中速 BWIM 系统，车辆最大行驶速度低于 50km/h，误差范围在 2%~10%之间；高速 BWIM 系统允许车辆以 100km/h 的速度通过，误差范围在 15%~20%。

## 2. 安装和运营维护的成本高

现有车辆动态称重系统一般都需要先进行掘坑再固定安装，施工周期比较长，而且会对路面造成损害，同时安装造价成本也很高，在路面施工期间也会影响道路的正常行驶。系统在使用一定年限之后测量精度会下降，需要重新校正或者安装。

## 3. 测量精度的限制<sup>[18]</sup>

在 BWIM 系统中，采集的信号中除了包含系统自身以及环境因素引起的高频噪声（如湿度、风力、温度等因素）外，还包含车辆行驶时周期振动的低频干扰，这些都会影响动荷载测量的精度。

在我国，只有少数大型桥梁的一部分路段上才采用这种设备，以此来整治超载等违规现象，但是由于动态称重系统存在着上述的局限性，发展由结构响应间接识别移动车辆的荷载具有重要意义，目前国内外学者提出了一系列的荷载识别方法，主要可以分为时域法和频域法，现有的移动荷载识别法大多基于模态叠加原理<sup>[19]</sup>，识别的对象大多为简支梁或连续梁上的移动荷载。

### 1.2.1 国外研究现状

1988年，O'Connor和Chan等<sup>[20]</sup>首先提出了由桥梁结构的运动方程进行车辆轴重识别的方法，又称为解析法I(IMI)。该方法将桥梁结构进行离散，将它看作由许多质点组成的模型，在质点之间存在着无质量的梁单元将他们连接在一起，且梁单元为弹性体。通过这个模型所得到的动力响应或结果主要是由惯性力、达朗贝尔力和阻尼力共同作用产生。

1997年，Law等<sup>[21]</sup>提出了时域法(TDM)的基本概念，把桥梁结构和移动荷载之间通过一系列的二次微分方程建立联系。该方法把桥假定为线性的带粘滞阻尼的连续单元。如果模型的弯矩和加速度响应都可以获得，那么就可以计算得到荷载的值。基于模态叠加的原理，可以将结构的运动方程进行转换，利用模态坐标来表示方程对其进行解耦，进而可以用卷积积分的方法对解耦后的方程求解。

1999年，Law等<sup>[22]</sup>又提出了基于时-频变换进行荷载识别的方法(FTMD)。该方法基于模态叠加理论和傅立叶变换，把桥梁结构的运动方程用模态坐标表示出来。再运用最小二乘法、逆向的傅立叶变换和卷积积分等方法就可以得到移动荷载随时间变化的精确解。但是，FTDM在求解过程中还要求出这类问题中的伪逆矩阵，伪逆矩阵求解过程中对噪声非常敏感。

1999年，Chan等<sup>[23]</sup>基于解析法I进行改进，提出了解析法II(IMII)。IMII的方

法是以连续梁单元模型为基础，把桥简化为欧拉梁来识别上部通过的移动荷载。以欧拉梁理论与模态分解理论为基础，通过假定形函数，把实际测量得到的响应（如位移或者应变）转化为桥梁结构的模态位移，然后再对模态位移进行运算得出模态速度以及模态加速度。通过求解模态坐标系下的运动方程，就可以求得移动荷载的大小。

2000年，Chan等<sup>[24]</sup>把IMI、IMII、TDM和FTDM四种方法与传统的B-WIM系统移动荷载识别的结果进行了比较，通过对比和总结这些不同的移动荷载识别方法得知：在一定的精度范围内，这四种方法都可以识别出移动荷载的大小。但是每一种方法都存在着各自的优缺点和局限性，各种方法在实际使用过程中还要受到测试条件的限制。

2001年，Chan<sup>[25]</sup>在研究中发现IMI和IMII存在着对信号中噪声敏感的问题，其中TDM和FTDM对移动荷载识别精度相对较高。当需要考虑多种因素的不同影响(如：信号的采样频率、模态数量、不同的车辆速度、传感器的布设位置)时，TDM和FTDM都是适用的，但是也存在需要耗费大量时间进行计算的缺点。因此，TDM和FTDM不适用于进行实时轴重的识别。

2001年，Law和Fang<sup>[26]</sup>提出了使用有限元的方法来评估简支梁测试响应的最优状态估计法。这种计算方法利用动态规划技术求解简支梁的状态方程，并且利用了最小化原则，使测量数据和移动荷载作用下的计算响应之间的误差最小化。

上述的各种方法起初只是适用于简支梁体系，为了使这些方法能有更广泛的应用范围，学者们也将这几种识别方法应用到了连续梁上。

1999年，Zhu和Law<sup>[27]</sup>应用TDM的方法对变截面连续梁上通过的移动荷载进行了识别，其中连续梁采用不同横截面的Timoshenko模型来模拟变截面。位移或应变等原始数据采用哈密顿原理和拉格朗日方程进行处理，并利用正则化技术的时域识别方法进行计算，能成功识别出移动荷载。

2001年，Zhu和Law<sup>[28]</sup>又提出了基于广义正交函数的方法，该方法通过测量的应变进行转换直接得到桥梁结构测点的速度和加速度值，这种方法可以减小在实际测量过程中由于噪声所带来的误差。

2003年，Zhu和Law<sup>[29]</sup>在研究中把上述的四种MFI计算方法应用到了连续梁体系中，并且他们指出把这些方法应用于多跨连续梁的弊端在于计算时间过长。

2005年，Law和Lu<sup>[30]</sup>基于模态叠加原理，提出了一种可行的间接法，把施加了预应力的桥面板简化为Euler-Bernoulli梁。利用系统识别法的TDM求解预应力欧拉梁的动态响应。

2006年，Chan和Ashebo<sup>[31]</sup>提出了一种新的连续梁荷载识别技术，这种方法在车辆通过全桥时只关注连续梁某一跨的响应，而不是所有跨的响应。在随后的研究中他们再次验证SVD技术可以减少由于PI矩阵的估算所引起的病态问题的求解

误差。

### 1.2.2 国内研究现状

国内也有诸多学者对荷载识别进行了研究：

1997年，袁向荣等<sup>[32]</sup>介绍了欧拉梁振动基本原理，用桥梁测点响应来识别桥梁上车辆移动荷载的方法，其识别基本思路为首先运用最小二乘法和模态叠加法由桥梁结构的动响应来识别桥梁的模态位移，然后利用差分法分别解出桥梁的模态速度以及模态加速度，最后再根据桥梁的模态坐标方程以及最小二乘法求解出桥梁的移动荷载，利用数学仿真分析了测试误差以及桥梁的基本参数、车辆荷载的间距与识别结果的对应关系。

2001年，余岭等<sup>[33,34]</sup>基于欧拉梁模型，利用移动荷载产生的动力响应在时间域与频率域范围内对移动荷载进行识别的方法，探讨了影响动力响应的主要因素与识别精度的关系，比较了移动荷载识别过程中求解不同的线性方程组对识别精度的影响。

2005年，卜建清等<sup>[35]</sup>将车辆在桥上行驶的过程等效成定长度恒速率在正交异性板上的移动荷载，以正交异性板来模拟板梁桥，并使用弹性板理论，运用模态叠加原理得到系统状态方程，最后推导出状态空间移动荷载识别方法。

2006年，李忠献和陈峰团队<sup>[36~38]</sup>对桥梁上的移动荷载识别多方面的问题进行了比较细致的理论和试验研究，取得了较大的进展。基于模态叠加法和连续梁固有振动的精确解，介绍了样条函数逼近法、最小二乘法、奇异值分解技术、梁格法对梁桥和斜拉桥等复杂结构的桥梁移动荷载识别，并进行了理论和试验的研究。

2007年，余岭等<sup>[39,40]</sup>提出了基于矩量法思想对移动荷载识别的TDM方法进行改进，并将改进后的方法应用于简支梁桥的荷载识别试验中，这种算法具有省时且实用性很强的优点。同时对荷载识别求解过程中方程不适定问题进行了研究，得出通过预处理共轭梯度法，可以对系数矩阵的病态问题进行明显的改善，而且各个不同的测点布设、桥面粗糙程度以及迭代的次数都会对结果产生影响。

2008年，陈震、朱军华<sup>[41]</sup>等研究了时域法（TDM）偶尔会出现识别精度较低的问题，提出了利用矩量法和预处理共轭梯度法对移动荷载进行识别的思想并对其进行了仿真研究验证了其有效性。

2009年，陈震<sup>[42]</sup>等将预处理共轭梯度法应用到桥梁移动车载识别中，仿真计算结果表明：多数情况下，这种方法识别较精确，预优矩阵的不同对方程的病态性和环境噪声的处理也不同，并且对识别荷载误差和方程的收敛速度有影响。

2013年，韩万水等<sup>[43]</sup>进行了基于有限元修正方法的移动荷载识别研究，运用了有限元修正技术，以识别整车质量为目标，识别过程中采用静力极值为参数，

通过这种方法降低了车桥耦合振动中诸多不确定性的因素。

此外，近年来还有拟合法、人工神经网络方法和遗传算法运用于移动荷载的识别，取得了很多成果。

### 1.3 移动荷载识别算法的改进方向

在求解反问题的过程中，面临着两个本质性的问题：（1）信号中微小的测量误差可能会导致解的严重错误，病态矩阵就属于这种情况；（2）原始问题可能不属于精确解所对应的数据集合，所以它的近似解有可能并不存在。总的来说，反问题求解关键还是在于如何解决方程不适定的问题，只有对算法进行优化和改进，才能得到正确的解。

因此，针对移动荷载识中的误差优化，可以从以下四个方面进行改善，来提高识别精度<sup>[44]</sup>：

（1）对于 BWIM 系统，用来荷载识别的影响线应该尽可能地符合实际桥梁影响线，通过实际标定、有限元建模计算的方法对影响线进行校正。

（2）求解荷载识别方程过程中选择好的方法处理病态问题，可采用共轭梯度法、Tikhonov 正则化等方法。

（3）由于采集的数据信号中有大量的冗余数据，利用遗传算法和神经网络法可以快速搜索和进行识别方程的快速求解。

（4）通过数字信号处理的手段将噪声和真实信号进行分离，对数据滤波降噪获得可用的信号，减小求解误差。

解析法 I 和 II、时域法、频-时域法对移动荷载的识别最后都转化为线性方程组  $Ax=b$  的求解问题。方程中  $A$  表示与荷载、桥梁结构有关的系统矩阵， $x$  是荷载的列向量， $b$  是测点响应的的时间列向量。在一般的情况下，由于测得的数据足够，方程组一般是超定的，用最小二乘法就可以求出每一个时间的荷载。除最小二乘法以外，常用的求解方法还有通过伪逆求解，但是由于测得的数据中包含噪声，或者测量过程中存在误差，矩阵  $A$  经常是欠秩或者接近欠秩，这个时候存在解出的荷载不唯一的情况，使得识别的荷载结果不稳定。针对这个问题，有学者提出利用奇异值分解的方法进行解决，通过奇异值分解求出系数矩阵对应的特征值和特征向量，这个方法虽然有效，但是对于秩亏损较小而矩阵较大时存在工作量偏大的缺点。因此，考虑到现有求解方法存在的问题，仍然需要对求逆过程中的误差进行改进，主要可以从两个方面着手：（1）采用优化估计方法减小系数矩阵的估计误差；（2）尽量避免系数矩阵的求逆。

#### 1.共轭梯度法

共轭梯度法<sup>[45]</sup>(CGM)在解决大型稀疏矩阵的方程组病态中有非常好的效果。

这种方法的原理是通过计算  $n$  元二次函数  $\varphi(x)$  的极小值点  $x$  得到方程组  $Ax = y$  的近似解。 $\varphi(x)$  的表达式为：

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (x, y) \quad (1.1)$$

共轭梯度法本质上是对方程进行预处理，通过这种方法降低系数矩阵条件数，也就是寻找一个预优矩阵  $C$  将方程  $Ax = y$  变形为：

$$C^{-1}Ax = C^{-1}y \quad (1.2)$$

令： $\bar{A} = C^{-1}AC$ ， $\bar{x} = CTx$ ， $\bar{y} = C^{-1}y$ ，则： $Ax = y$  等价于  $\bar{A}\bar{x} = \bar{y}$ 。

此时的条件数关系为  $cond_2(A) < cond_1(A)$ ，方程可以转化为求函数  $\varphi(x)$  的极小值问题。在现有的各种方程求解误差的优化算法中，CGM 和 PCGM 是两种非常重要的方法。他们的优点是计算过程中需要的存储量小，计算稳定性高，并且不需通过其他的算法来确定参数。

## 2.神经网络法

神经网络法<sup>[46]</sup>可以通过调整层间权值来进行系统输入输出关系的模拟，识别的过程主要包括：以测点的动力响应作为为输入，求解移动荷载作为输出，创建训练样本向量；选取神经网络的拓扑结构，当桥上有移动荷载作用的时候，把每一时刻桥梁的动力响应作为输入同时把对应的真实荷载作为期望输出值进行训练，直至求得的结果收敛；将不同测点实际测量得到的动力响应作为输入，经过神经网络的映射得到与响应相对的移动荷载值；最后将识别得到的结果与移动荷载真实大小进行对比，如果误差在允许范围内则识别的过程结束，否则对神经网络继续进行训练，直到识别的荷载误差在规定范围内为止。这种方法的精度与训练的样本的数量有一定关系，神经网络学习的样本数越多，误差能够得到显著降低，识别荷载的准确性就越高。

## 3.遗传算法

遗传算法<sup>[47]</sup>是由生物遗传机制变化产生的随机搜索方法，它可以让算法收敛到全局最优解，其原理是自动获取并对搜索空间进行优化，调整搜索方向。荷载识别过程中的具体流程是：首先建立目标函数，对移动荷载来说，可以利用各测点的动力响应与未知移动荷载计算得到的动力响应的差值函数作为目标函数，利用测点的实测数据产生初始群体。如果输出的识别荷载与预期荷载相比存在较大误差，则对参数进行选择、变异、交叉的操作，产生新一代的群体，再用新一代的群体进行计算，直到结果满足要求。

## 4.小波分析法

小波分析法<sup>[48]</sup>的原理是通过去除信号中的高频噪声对信号进行优化，再用优化后的动应变响应对移动荷载进行识别。通过小波分析将信号分解为高频和低频部分，由振动理论可知，高频位移响应和低频位移响应分别是由高频应变信号和

低频应变信号计算得来的。由于样条函数具有曲线拟合及微分稳定的能力，可利用其对低频信号进行拟合，再通过微分运算得到测点不同频率的应变响应，最后将其结果综合即得该测点应变响应，通过多测点的应变响应就可以得到荷载识别的结果。

## 1.4 本文研究的内容

本文以梁桥为研究对象，研究了基于应变和加速度信号的移动荷载识别方法，通过对应变信号进行分解得到静力应变，利用最小二乘法拟合曲率函数推算静力荷载作用下产生的静力位移，再由加速度的积分算法得到振动位移，最终通过重构的动位移进行移动荷载的识别。本文所做的主要工作如下：

(1) 以加速度信号为对象，研究了基于MATLAB数值算法的频域和时域积分，验证了通过加速度积分计算位移的可行性，并讨论了影响积分精度的主要因素。采用信号降噪和最小二乘法拟合去趋势项的方式来提升积分结果的可靠性

(2) 利用经验模态分解的方法对含有高频噪声的应变信号进行分解，通过保留低频分量得到移动荷载静力部分所产生的应变值，再由多个数据采集点的结果进行曲率函数的拟合，求出移动荷载作用下任意点的位移时程曲线。

(3) 以一跨度为 25m 简支梁桥为例，通过ANSYS的模拟研究各种不同外部条件对桥梁动力响应的影响，并通过一组时变荷载验证了编程的IMII和TDM算法识别荷载的正确性。

(4) 在试验室建立了梁和车的试验模型，在试验中验证了动位移重构方法的可行性，并利用重构的动位移成功识别出各个不同工况下的移动荷载结果。

## 第2章 荷载识别理论及振动方程的建立

基于桥梁动力响应进行移动荷载识别是一个具有实际意义的课题，BWIM 系统对于车速较小的情况能够以较高的精度识别出移动荷载的大小，但是当车速较快时，由于荷载惯性力的存在会使得识别的误差偏大。因此对于具有不同移动速度的荷载来说，传统称量总重的方法更加适用于低速移动荷载的识别，但是对于大部分桥梁来说，车辆行进过程中由于惯性力产生的动荷载同样重要，因此利用桥梁动力响应来识别车辆荷载是十分有必要的。本章主要介绍了目前移动荷载识别过程中常采用的荷载模型和梁结构模型，以及基于桥梁动力响应来进行移动荷载识别的几种方法。

### 2.1 荷载分析模型

#### 2.1.1 移动荷载理论

古典的车桥振动理论对于分析移动荷载作用下梁的振动原理和产生振动的原因有较大的贡献，但是由于模型简单，从理论上不能对现实情况中复杂的车桥耦合系统进行合理的解释<sup>[49]</sup>。

随着计算机的应用和发展，现代车辆振动分析理论在古典理论的基础上得到了很大的完善，通过有限元可以建立更加接近真实情况的车辆模型，并且能够将桥梁理想化为质量连续的有限元模型，并且开始研究桥面不平整度对车辆产生的激励作用。

1970 年，Veletsos 和 Huang<sup>[49]</sup>提出了具有多个车轴的车辆模型，这一理论具备准确性好且易于计算的特点，伴随着有限元方法的快速发展，该车辆模型在车-桥系统中的分析得到广泛的应用。当需要快速简洁地进行计算的时候，可进一步简化为单轴模型和两轴模型。

70 年代末，有限元的方法兴起并得到了广泛的应用，结合模态分析理论，Mulcahy、Hutton<sup>[50]</sup>先后利用有限元法对公路桥梁在两轴车辆通过时的动力响应进行了研究。并且开始考虑桥面不平整度对车桥振动产生的影响。

台湾的 Yang<sup>[51]</sup>运用了动态凝聚法求解车桥系统的动力响应问题，通过对车体有关的自由度以单元为单位进行缩减，大大提高了计算效率。曾庆元院士<sup>[52]</sup>建立了车桥耦合振动系统在任何时刻和位置的总势能计算式，由势能驻值不变原理及对号入座法则，将车桥系统视为一个振动特性随列车过桥时间变化的整体，再求解系统的响应。曹雪琴等<sup>[53]</sup>对钢桁架桥的横向振动进行了分析，还着重研究了钢桁架桥在列车过桥时的空间振动，推导了车桥的动力平衡方程，利用逐步积分

的方法求方程组，轨道的不平顺性和车辆的蛇行运动是横向振动的激励源。夏禾<sup>[54]</sup>、阎贵平<sup>[55]</sup>将车辆进行简化得到悬挂振动系统，并分别建立了车桥竖向和横向振动分析的模型，研究了车-桥-墩体系的动力相互作用以及发生地震时在地震荷载作用下列车运行的平稳性，获得了一系列的成果。沈锐利<sup>[56]</sup>研究了钢桁架桥的车桥空间耦合问题，他们将车桥耦合系统分成车辆和桥梁两个子系统，利用迭代求解技术研究车桥系统的空间响应。在分析过程中，当不需要考虑桥梁的空间振动时，常常采用的二维的车辆模型，如图 2.1 所示，其中  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $\theta_b$  表示车体运动过程中的自由度， $m_1$ 、 $m_2$  分别表示车体质量和悬挂下部质量， $k_a$ 、 $c_a$  分别表示悬挂的刚度和阻尼，部分模型也会考虑车辆轮胎的刚度和阻尼的影响。

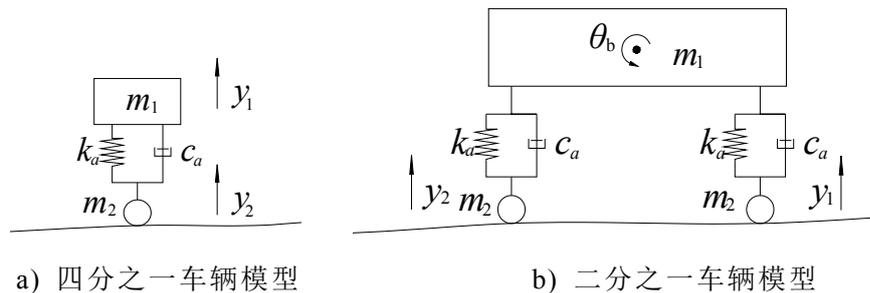


图 2.1 二维车辆模型

### 2.1.2 分析方法

现有的对车-桥振动系统进行求解方法有很多种，各个方法都有自己的优缺点，且都能够计算出比较准确的理论值。从整体上来说，所有的方法都可以归结为时域方法和频域方法<sup>[57]</sup>两种。

频域法最大的优点是可以只用有限的低阶模态进行计算就能在比较复杂的系统里取得不错的精度<sup>[57]</sup>，通过这种方法可以有效减少计算量。但是车-桥系统是一个随着车辆运动变化的时变系统，系统的质量矩阵和阻尼矩阵时刻都在改变，频域法的假定是频响函数在某一时刻不会随时间而变化，故通过这种方法求解得到的结果具有近似性，对非线性问题处理存在较大误差。

由于车桥系统的时变特性，目前大多数主流的研究方法都集中在时域，时域分析的方法可以分为两种。一种是非耦合方法<sup>[58]</sup>，这种方法是将车辆模型与桥梁模型分别当作两个独立的系统，并各自建立运动方程。这种方法通过车与桥互接触位置的位移协调以及车桥相互作用力进行方程组的联立，最后进行迭代求解。

另一种方法是耦合方法<sup>[58]</sup>，在这种方法中，车与桥的模型通过接触位置的不同位移耦合成一个整体，再进行求解。对比上述非耦合的方法，耦合法由于省略了迭代的过程，在减少整体计算量的同时节约了计算机的内存占用量，提升了计算的速度，可以得到车桥系统整体的运动特性。另一方面，用耦合方法建立系统振动方程的时候，车辆在移动过程中在桥上的位置不停地变动，整个运动方程的

质量矩阵和阻尼矩阵也随着时间在变化，需要在每一个运动时刻重新生成系统的矩阵。非耦合法对汽车模型和桥梁模型分别建立运动方程，因此不存在这个问题，因此虽然非耦合方法的计算量较大，但是它的整个计算流程更加简单。

在求解车桥振动方程中，模态叠加法<sup>[19]</sup>是经常采用的方法，将桥梁的几何方程写为模态方程，更加有利于分析。低阶模态是影响桥梁振动特性的主要因素，通过模态坐标的变换可以降低计算量，减少桥梁的自由度，但是模态叠加理论也有它的缺点，由于模态叠加理论是基于桥梁的自由振动分析得到的结果，而在车桥振动系统的分析中，桥梁上始终有移动荷载作用在上部，特别是当荷载数量较多的时候不能忽略车辆质量带来的影响改变了自由振动的条件，在这种情况下再通过模态分解理论进行求解会产生较大的误差。

## 2.2 荷载识别的桥梁模型

### 2.2.1 离散的梁单元模型

O'Connor 和 Chen<sup>[20]</sup>把梁单元的质量集中在节点上，提出了离散的简支梁桥的简化模型，如图 2.2 所示。

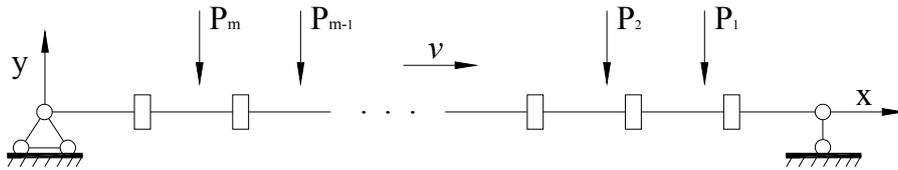


图 2.2 离散的梁单元模型

由力的平衡条件可以得到单元节点任意时刻位移或者弯矩响应，可由式(2.1)和式(2.2)给出：

$$\{Y\} = [Y_A]\{P\} - [Y_I][\Delta m]\{\ddot{Y}\} - [Y_I][C]\{\dot{Y}\} \quad (2.1)$$

$$\{M\} = [M_A]\{P\} - [M_I][\Delta m]\{\ddot{Y}\} - [M_I][C]\{\dot{Y}\} \quad (2.2)$$

式中  $\{P\}$  表示轴重荷载向量， $[\Delta m]$  表示质量的对角矩阵， $[C]$  为阻尼矩阵； $\{M\}$ 、 $\{Y\}$ 、 $\{\dot{Y}\}$ 、 $\{\ddot{Y}\}$  分别表示各个节点的弯矩、位移、速度以及加速度。 $[Y_A]$ 、 $[Y_I]$  分别表示节点荷载、节点位移的关系矩阵，同理， $[M_A]$ 、 $[M_I]$  表示的是节点荷载、节点弯矩的关系矩阵，其中下标  $A$  和  $I$  分别表示实际作用力以及结构的内力。

从公式中可以看出，求解移动荷载可以利用加速度  $\{\ddot{Y}\}$ 、位移或者弯矩。对于各个节点来说，如果位移  $\{Y\}$  已知，则  $\{\dot{Y}\}$  和  $\{\ddot{Y}\}$  通过数值微分可以求得，式(2.1)是超静定的线性方程组，其中  $P$  可以通过求解得到。类似的，如果  $\{\ddot{Y}\}$  已知，则通过积分法可求解  $\{\dot{Y}\}$  和  $\{Y\}$  进一步也可以求得  $P$ 。然而，若把测量的弯矩作为输入，求解过程会出现困难，因为移动荷载并不是总是作用在节点上，此时的节点位移和节点弯矩的关系可以表达为：

$$\{Y\} = [Y_B]\{M\} + [Y_C]\{P\} \quad (2.3)$$

这里  $[Y_B]\{M\}$  代表一点或多点荷载  $P$  作用在单元内引起的附加弯矩而导致的变形,  $[Y_C]$  可根据已知荷载的位置来计算。

### 2.2.2 简支梁模型

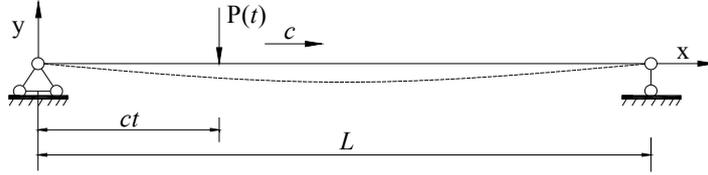


图 2.3 简支梁模型

桥梁可以简化为跨度  $L$  的等截面模型, 单位长度的质量大小  $\rho$ , 假设结构的抗弯刚度为  $EI$ , 黏性比例阻尼为  $C$ , 并假设其为欧拉-伯努利梁, 不考虑剪切变形。如图 2.3 所示, 当集中力以速度  $c$  从左向右通过时, 梁的振动方程可表达为<sup>[25]</sup>:

$$\rho \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = \delta(x-ct)P(t) \quad (2.4)$$

其中  $v(x,t)$  为梁体  $x$  坐标位置处在  $t$  时刻的挠度,  $\delta(x-ct)$  为狄拉克函数。

简支梁的第  $n$  阶模态函数可以写作  $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ , 则方程 (2.4) 的解为:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (2.5)$$

式中  $n$  表示阶数,  $q_n(t)$  ( $n=1,2,3,\dots,\infty$ ) 代表  $n$  阶模态的组合系数, 即第  $n$  阶模态的广义坐标。将 (2.5) 代入方程 (2.4) 式, 并在  $0$  到  $l$  的区间内对  $x$  积分, 引入简支梁的边界条件和狄拉克函数的性质, 则运动方程可以用模态的广义坐标进行表示:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{2}{\rho L} P_n(t) \quad (n=1,2,3,\dots,\infty) \quad (2.6)$$

其中  $\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ ,  $\xi_n = \frac{C}{2\rho\omega_n}$ ,  $P_n(t) = P(t) \sin(\frac{n\pi \bar{x}}{L})$  分别为第  $n$  阶模态频率,

模态阻尼和模态力。  $\bar{x}$  为集中力与左边支座的距离。如果时变力  $P(t)$  已知, 则由方程(2.6)可求解得出模态坐标  $q_n(t)$ , 由(2.4)式可以求出动态挠度  $v(x,t)$ , 这就是正问题的求解。而荷载识别是一种反问题的求解, 它通过测量结构各个测点的位移、速度和加速度数据对未知的荷载  $P(t)$  进行识别。

## 2.3 移动荷载识别方法

在识别移动荷载的过程当中, 需要考虑方法的准确性和可操作性, 荷载的模型选用要合理, 荷载模型的复杂化对于桥梁的响应并不会产生太大的影响, 模型的选择上应充分考虑实际各方面的因素, 实际影响不大的部分可以进行简化。学

者在早期研究中提出了可以对荷载时间历程进行描述的解析法 I(IMI)，随着有限元方法的发展，又提出了解析法 II (IMII)，这种方法可以用来识别多轴车辆的动态轴型。随后 Law 等人基于系统识别理论创立了两种荷载识别方法，分别称之为时域法和频域-时域法。

### 2.3.1 解析法 I (IMI)

解析法 I<sup>[59]</sup>采用的是离散的梁单元模型。如 2.2.1 所指出的那样，解析法 I 由  $\ddot{Y}$  (加速度)、 $\dot{Y}$  (速度)或  $M$ (弯矩)得到问题的解。如果知道全部时间内所有内部点的位移，则可用数值微分的方法求得  $\dot{Y}$  和  $\ddot{Y}$ 。从而可将式(2.1)转化为一组超静定线性方程并由此可解出  $P$ 。同理，如果  $\dot{Y}$  已知，对其积分则可得出  $Y$  和  $\ddot{Y}$ ，进一步可得到  $P$ 。

### 2.3.2 解析法 II(IMII)

此法以满足理论假设的等截面简支梁，并以简支为边界条件，求解出动荷载下的桥梁响应精确解，推导出了识别动态荷载的方法，若有多个力同时作用于梁上的时候，根据模态分解法，可将方程写为<sup>[59]</sup>：

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1\dot{q}_1(t) \\ 2\xi_2\omega_2\dot{q}_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2q_1 \\ \omega_2^2q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_n^2q_n \end{bmatrix} = \frac{2}{\rho L} \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi(ct-\bar{x}_1)}{L} & \sin \frac{\pi(ct-\bar{x}_2)}{L} & \dots & \sin \frac{\pi(ct-\bar{x}_k)}{L} \\ \sin \frac{2\pi(ct-\bar{x}_1)}{L} & \sin \frac{2\pi(ct-\bar{x}_2)}{L} & \dots & \sin \frac{2\pi(ct-\bar{x}_k)}{L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin \frac{n\pi(ct-\bar{x}_1)}{L} & \sin \frac{n\pi(ct-\bar{x}_2)}{L} & \dots & \sin \frac{n\pi(ct-\bar{x}_k)}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_k \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

式中  $\bar{x}_k$  为第  $k$  个荷载与第 1 个荷载之间的距离，其中  $\bar{x}_1 = 0$ 。

因而  $x_1, x_2 \dots x_n$  处的模态位移既可由式 (2.7) 求解得到，也可对位移求二阶导数得出。各点相应的弯矩可由关系式  $M = -EI(\partial^2 v / \partial x^2)$  求得。

如果  $P_1, P_2, \dots, P_k$  为常量时，方程(2.7)有如下形式的解析解：

$$v(x,t) = \frac{L^3}{48EI} \sum_{i=1}^k P_i(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha^2)} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[ \sin \frac{n\pi(vt - \bar{x}_i)}{L} - \frac{\alpha}{n} \sin \omega_n \left( t - \frac{\bar{x}_i}{v} \right) \right] \quad (2.8)$$

式中  $\alpha = \frac{\pi v}{L\omega_n}$ ，若在移动常荷载的作用下，坐标  $x_1, x_2, \dots, x_n$  处的位移是已知的，所有的移动荷载值可以由下列方程得到：

$$\{v\} = [S_{vP}] \{P\} \quad (2.9)$$

或者可以写为：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \\ \vdots \\ v_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1i} & \cdots & s_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & & s_{mi} & & s_{mk} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{l1} & \cdots & s_{li} & \cdots & s_{lk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_k \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

其中

$$S_{mi} = \frac{L^3}{48EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha^2)} \sin \frac{n\pi x_m}{L} \left( \sin \frac{n\pi(ct - \bar{x}_i)}{L} - \frac{\alpha}{n} \sin \omega_n \left( t - \frac{\bar{x}_i}{v} \right) \right) \quad (2.11)$$

如果  $l \geq k$ ，表明位移测点的数目大于等于荷载数目。 $\{P\}$  可由最小二乘法解出。

$$P = ([S_v P]^T [S_v P])^{(-1)} [S_v P]^T v \quad (2.12)$$

若用弯矩替代位移同样可得到解析形式的弯矩解，同理也可以列出求解方程：

$$M(x,t) = \frac{L}{4} \sum_{i=1}^k P_i(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2}{\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{1}{n^2(n^2 - \alpha^2)} \left[ \sin \frac{n\pi(ct - \bar{x}_i)}{L} - \frac{\alpha}{n} \sin \omega_n \left( t - \frac{\bar{x}_i}{v} \right) \right] \quad (2.13)$$

### 2.3.3 时域法 (TDM)

式(2.6)给出了移动荷载作用下桥梁运动方程的模态坐标表示方法，该方程可以通过卷积积分的方法在时域求解  $q_n(t)$ ，即时域求解法<sup>[59]</sup>：

$$q_n(t) = \frac{1}{M_n} \int_0^t h_n(t-\tau) p_n(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

其中： $h_n(t) = \frac{1}{\omega'_n} e^{-\xi_n \omega'_n t} \sin(\omega'_n t)$   $t \geq 0$ ， $\omega'_n = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$ ， $M_n = \frac{2}{\rho L}$

由此可以得到梁上  $x$  处， $t$  时刻的位移为：

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{M_n \omega'_n} \sin \frac{n\pi x}{L} \int_0^t e^{-\xi_n \omega'_n (t-\tau)} \sin \omega'_n (t-\tau) \sin \frac{n\pi v\tau}{L} P(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

(1) 通过弯矩响应识别移动荷载

梁上的  $x$  处， $t$  时刻的弯矩为：

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

将 (2.16) 代入 (2.15) 得到：

$$M(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2EI\pi^2}{\rho L^3} \frac{n^2}{\omega_n'} \sin \frac{n\pi x}{L} \int_0^t e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n' (t-\tau) \sin \frac{n\pi v\tau}{L} P(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

假定  $P(t)$  是时间步长  $\Delta t$  的函数，上式可写成离散形式：

$$M(i) = \frac{2EI\pi^2}{\rho L^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^2}{\omega_n'} \sin \frac{n\pi x}{L} \sum_{j=0}^i e^{-\xi_n \omega_n \Delta t (i-j)} \sin \omega_n' \Delta t (i-j) \sin \frac{n\pi v \Delta t j}{L} P(j) \Delta t$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \dots, N) \quad (2.18)$$

这里的  $\Delta t$  为采样时间间隔， $N+1$  为数据的样本数，假设：

$$C_{xn} = \frac{2EI\pi^2}{\rho L^3} \frac{n^2}{\omega_n'} \sin \frac{n\pi x}{L} \Delta t, \quad E_n^{i-j} = e^{-\xi_n \omega_n \Delta t (i-j)},$$

$$S_1(i-j) = \sin \omega_n' \Delta t (i-j), \quad S_2(j) = \sin \left( \frac{n\pi v \Delta t}{L} j \right)$$

则 (2.18) 的矩阵形式为：

$$\begin{Bmatrix} M(0) \\ M(1) \\ M(2) \\ \vdots \\ M(N) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} C_{xn} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_n^1 S_1(1) S_2(1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & E_n^{N-1} S_1(N-1) S_2(1) & E_n^{N-2} S_1(N-2) S_2(2) & \cdots & E_n^{N-N_B} S_1(N-N_B) S_2(N_B) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ \vdots \\ P(N_B) \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

这里  $N_B = \frac{L}{v\Delta t}$ ，在上桥和下桥时刻， $P(t) = 0$ ，即  $P(0) = 0$ ， $P(N_B) = 0$ ；由式

(2.19) 可得： $M(0) = 0$ ， $M(N_B) = 0$ ；

式 (2.19) 可以重新写为：

$$\begin{Bmatrix} M(2) \\ M(3) \\ \vdots \\ M(N) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} C_{xn} \times \begin{bmatrix} E_n^1 S_1(1) S_2(1) & 0 & \cdots & 0 \\ E_n^2 S_1(2) S_2(1) & E_n^1 S_1(1) S_2(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_n^{N-1} S_1(N-1) S_2(1) & E_n^{N-2} S_1(N-2) S_2(2) & \cdots & b_{ee} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P(1) \\ P(2) \\ \vdots \\ P(N_B - 1) \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

这里  $M(i)$  是第  $i$  个时间步长的弯矩， $P(i)$  是第  $i$  个时间步长的轴荷载，且：

$$b_{ee} = E_n^{N-N_B+1} S_1(N-N_B+1) S_2(N_B-1) \quad (2.21)$$

式(2.20)的简化形式为：
$$[B]\{P\}=[M] \quad (2.22)$$

如果  $N=N_B$ ，矩阵  $B$  为下三角矩阵，荷载向量  $P$  可以由式(2.22)直接解出，如果  $N>N_B$ ，或者有  $N_l$  个测点的弯矩响应 ( $N_l>1$ )，可通过最小二乘法求得荷载向量  $P$ ：

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{N_l} \end{bmatrix} \times P = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N_l} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

上面推导了单轴作用在结构上移动荷载的识别过程，针对有多个车轴的荷载的识别问题，可以用线性叠加的原理建立方程组：

$$\begin{bmatrix} B_a & 0 \\ B_b & B_a \\ B_c & B_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = M \quad (2.24)$$

这里的  $B_a[N_s(N_B-1)]$ 、 $B_b[(N-1-2N_s)(N_B-1)]$ 、 $B_c[N_s(N_B-1)]$  为  $B$  的子矩阵，其中  $N_s = l_s / v\Delta t$ ， $l_s$  表示两轴载情况下荷载之间的距离。矩阵的第一行表示一个荷载上桥而另外一个荷载还未上桥的情况，第二行表示两个荷载都在桥上，第三行表示第一个荷载已经下桥而第二个荷载仍在桥上的状态。

## (2) 由加速度进行荷载识别

梁上  $x$  处， $t$  时刻的加速度可以写为：

$$\ddot{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \phi_n(x) \left[ P_n(t) + \int_0^t \ddot{h}_n(t-\tau) P_n(\tau) d\tau \right] \quad (2.25)$$

其中：
$$\ddot{h}_n(t) = \frac{1}{\omega_n} e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ [(\xi_n \omega_n)^2 - \omega_n'^2] \sin \omega_n' t + [-2\xi_n \omega_n \omega_n'] \cos \omega_n' t \right\};$$

式(2.25)进行离散表示：

$$\ddot{v}(i) = \frac{2}{\rho L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi v \Delta t i}{L} \left[ \sin \frac{n\pi x}{L} P(i) + \sum_{j=0}^i \ddot{h}_n(i-j) \sin \frac{n\pi v \Delta t j}{L} P(j) \Delta t \right] \quad (2.26)$$

其中第  $n$  阶模态加速度响应为：

$$\ddot{v}(i)_n = \frac{2}{\rho L} \sin \frac{n\pi x}{L} \left[ \sin \frac{n\pi v \Delta t i}{L} P(i) + \sum_{j=0}^i \ddot{h}_n(i-j) \sin \frac{n\pi v \Delta t j}{L} P(j) \Delta t \right] \quad (2.27)$$

假设  $D_{xn} = \frac{2}{\rho L} \sin \frac{n\pi x}{L}$ ， $H_n(i-j) = \Delta t \ddot{h}_n(i-j)$ ， $S_2(j) = \sin \left( \frac{n\pi v \Delta t}{L} \right) j$

式(2.27)可以写成如下矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{v}(0) \\ \ddot{v}(1) \\ \ddot{v}(2) \\ \vdots \\ \ddot{v}(N) \end{Bmatrix}_n = D_{xn} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2(1)[1+H_n(0)] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_n(1)S_2(1) & S_2(2)[1+H_n(0)] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & H_n(N-1)S_2(1) & H_n(N-2)S_2(2) & \cdots & H_n(N-N_B)S_2(N_B) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ \vdots \\ P(N_B) \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

在上桥和下桥的时刻  $P(0)=0$ ,  $P(N_B)=0$ , 故  $\ddot{v}(0)=0$ ; 式(2.28)可以重写为:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{v}(1) \\ \ddot{v}(2) \\ \vdots \\ \ddot{v}(N) \end{Bmatrix} = D_{xn} \begin{bmatrix} [1+H_n(0)]S_2(1) & 0 & \cdots & 0 \\ H_n(1)S_2(1) & [1+H_n(0)]S_2(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_n(N-1)S_2(1) & H_n(N-2)S_2(2) & \cdots & H_n(N-N_B+1)S_2(N_B-1) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} P(1) \\ P(2) \\ \vdots \\ P(N_B-1) \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

上式可以简化为:  $\{\ddot{v}\}=[A_n]\{P\}$ ; 如果  $[A_n]$  为下三角矩阵, 荷载向量  $\{P\}$  可以直接进行求解得到:

$$P = \left( \sum_{n=1}^{N_m} A_n \right)^{-1} \ddot{v} \quad (2.30)$$

如果  $N > N_B - 1$  或者有一个以上测点的加速度响应可以测得 ( $N_l > 1$ ), 可以由最小二乘法求得荷载向量  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} \left( \sum_{n=1}^{N_m} D_{xn} A_n \right)_1 \\ \left( \sum_{n=1}^{N_m} D_{xn} A_n \right)_2 \\ \vdots \\ \left( \sum_{n=1}^{N_m} D_{xn} A_n \right)_{N_l} \end{bmatrix}^+ \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \vdots \\ \ddot{v}_{N_l} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

式中的+代表求矩阵的伪逆。

(3)通过弯矩和加速度响应识别移动荷载

如果同时可以测得弯矩和加速度的响应，可以通过将二者组合起来进行荷载识别。对弯矩和加速度的识别式进行无量纲化处理之后，将两个方程的组合如下：

$$\begin{bmatrix} B / \|M\| \\ A / \|\ddot{v}\| \end{bmatrix} \times P = \begin{Bmatrix} M / \|M\| \\ \ddot{v} / \|\ddot{v}\| \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

式中的 $\|\cdot\|$ 代表向量的范数。

### 2.3.4 频域-时域法(FTDM)

频域法<sup>[59]</sup>是根据测得的响应，依据系统的传递函数矩阵与响应谱的关系在频域内确定力谱：或经模态坐标转换后计算模态力在频域的特性。式(2.6)可以在频域内求解，对其进行傅立叶变换可得：

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi_n \omega_n \omega} \frac{1}{M_n} P_n(\omega) \quad (2.33)$$

其中：

$$P_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_n(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.34)$$

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q_n(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.35)$$

令：

$$H_n(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi_n \omega_n \omega} \quad (2.36)$$

式中 $H_n(\omega)$ 为第 $n$ 阶模态的频率响应函数，对(2.22)式进行傅立叶变换，并将(2.33)和(2.36)代入变换后的等式，则可得到动态挠度 $v(x,t)$ 的傅立叶变换为：

$$V(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \phi_n(x) H_n(\omega) P_n(\omega) \quad (2.37)$$

同理，进行傅立叶变换后可得到弯矩、加速度与挠度 $v(x,t)$ 的关系表达式。最后，可得到频域内的方程组。其中通过傅立叶逆变换可以得到时变力 $P(t)$ 。由于方程刚开始是在频域内进行建立的，然后在时域内解得，因此被称为频-时域法。

(1) 加速度的荷载识别

对于式(2.37)， $x$ 位置 $t$ 时刻的加速度经过FFT变换：

$$\ddot{V}(x, \omega) = -\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \phi_n(x) H_n(\omega) P_n(\omega) \quad (2.38)$$

考虑到傅立叶变换具有周期性，并令：

$$\tilde{H}_m(m) = -\frac{\Delta f^3 m^2}{M_n} \phi_n(x) H_n(m) \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{V}(m) = & \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{H}_{xn}(m) \psi_n(m) [F_R(0) + iF_I(0)] \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{H}_{xn}(m) [\psi_n(m-k) + \psi_n(m+k-N)] F_R(k) \\
 & + i \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{H}_{xn}(m) [\psi_n(m-k) - \psi_n(m+k-N)] F_I(k) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{H}_{xn}(m) \psi_n(m-N/2) [F_R(N/2) - iF_I(N/2)] \quad m=0,1,\dots,N-1
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

式中  $\psi_n$  表示对第  $n$  阶模态进行傅立叶变换的结果，而  $F$  表示荷载的傅立叶变换。式 (2.40) 可以写成矩阵的形式，假定：

$$\begin{Bmatrix} \ddot{V}_R \\ \ddot{V}_I \end{Bmatrix}_{(N+2) \times 1} = \begin{bmatrix} A_{RR} & -A_{RI} \\ A_{RI} & A_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_R \\ F_I \end{Bmatrix}_{(N+2) \times 1} \tag{2.41}$$

因为  $F_I = 0$ ， $F_I(\frac{N}{2}) = 0$ ， $\ddot{v}_I(0) = 0$ ， $\ddot{v}_I(\frac{N}{2}) = 0$ ，式 (2.41) 可写成  $N$  阶齐次方程。

$$\ddot{V}_{RI} = A_D F_{RI} \tag{2.42}$$

$F_R$  和  $F_I$  可通过式(2.42)进行求解得到，离散的傅立叶变换可写成如下形式：

$$F = \frac{1}{N} W f \tag{2.43}$$

其中：

$$W = e^{(-j2k\pi/N)}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & N-2 & N-1 \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & N-4 & N-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & N-2 & N-4 & \cdots & 4 & 2 \\ 0 & N-1 & N-2 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \tag{2.44}$$

矩阵  $W$  为单式矩阵，即： $W^{-1} = (W^*)^T$  其中  $W^*$  为  $W$  的变异矩阵。将式 (2.43) 代入到 (2.42) 得到：

$$\ddot{V} = \frac{1}{N} A \begin{bmatrix} W_B & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_B \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.45}$$

式 (2.45) 在时域把加速度  $\ddot{v}$  的傅立叶变换与移动荷载向量  $P_B$  联系起来， $W_B$  是矩阵  $W$  的子矩阵。若  $N = N_B$ ， $P_B$  可通过求解  $N$  阶齐次线性方程得到。若  $N \geq N_B$  或者布设的加速度测点大于一个的时候，可通过最小二乘法求解移动荷载。

## (2) 由弯矩识别荷载

弯矩和移动荷载之间的关系可以表示为：

$$M = \frac{1}{N} B W P_B \tag{2.46}$$

$$\underset{N \times 1}{m} = \underset{N \times N}{(W^*)^T} \underset{N \times N}{B} \underset{N \times N}{W} \underset{N_B \times 1}{P_B} \quad (2.47)$$

$$\underset{N_C \times 1}{m_B} = \underset{N_C \times N}{(W^*)^T} \underset{N \times N}{B} \underset{N \times N}{W} \underset{N_B \times 1}{P_B} \quad (2.48)$$

移动荷载  $P_B$  可以通过求解上面三个方程组得到。

## 2.4 本章小结

本章主要介绍了在移动荷载识别过程中采用的荷载模型和梁单元模型，以及目前较为成熟的荷载识别理论。根据研究的侧重点在于桥梁响应还是车辆响应，可以选择不同的车辆模型和桥梁模型进行移动荷载的模拟，从现有的研究结果来看，每一种识别方法都具有各自的优缺点，其中时域识别法是目前普遍适用的方法，但是仍然存在着许多的不足，比如识别过程中对噪声很敏感，当车辆上桥和下桥的时刻荷载识别的结果不准确，单独采用弯矩响应来进行荷载识别的结果不理想。

在总结了现有的研究理论后，根据第二类反问题的求解路径，从输出部分寻找更优的求解方法，可以通过数字信号处理的手段将噪声和真实信号进行分离，对数据滤波降噪获得与结构实际运动更加相符的振动信号来减小求解的误差。通过对采集的应变信号和加速度信号进行分解、降噪和数值运算，利用优化和重组的动位移对荷载进行识别，是本文接下来研究的主要内容。

### 第3章 移动荷载作用下的动位移识别

与脉冲激励、地震荷载不同，移动荷载作用下的梁结构动位移不仅包含由惯性力所引起的振动位移，还包括静荷载作用下引起的静荷载位移。为了准确识别移动荷载作用下梁结构的动位移，本文通过对应变信号和加速度信号的分解、优化和转换，得到了重构后的动位移，如图 3.1 所示。

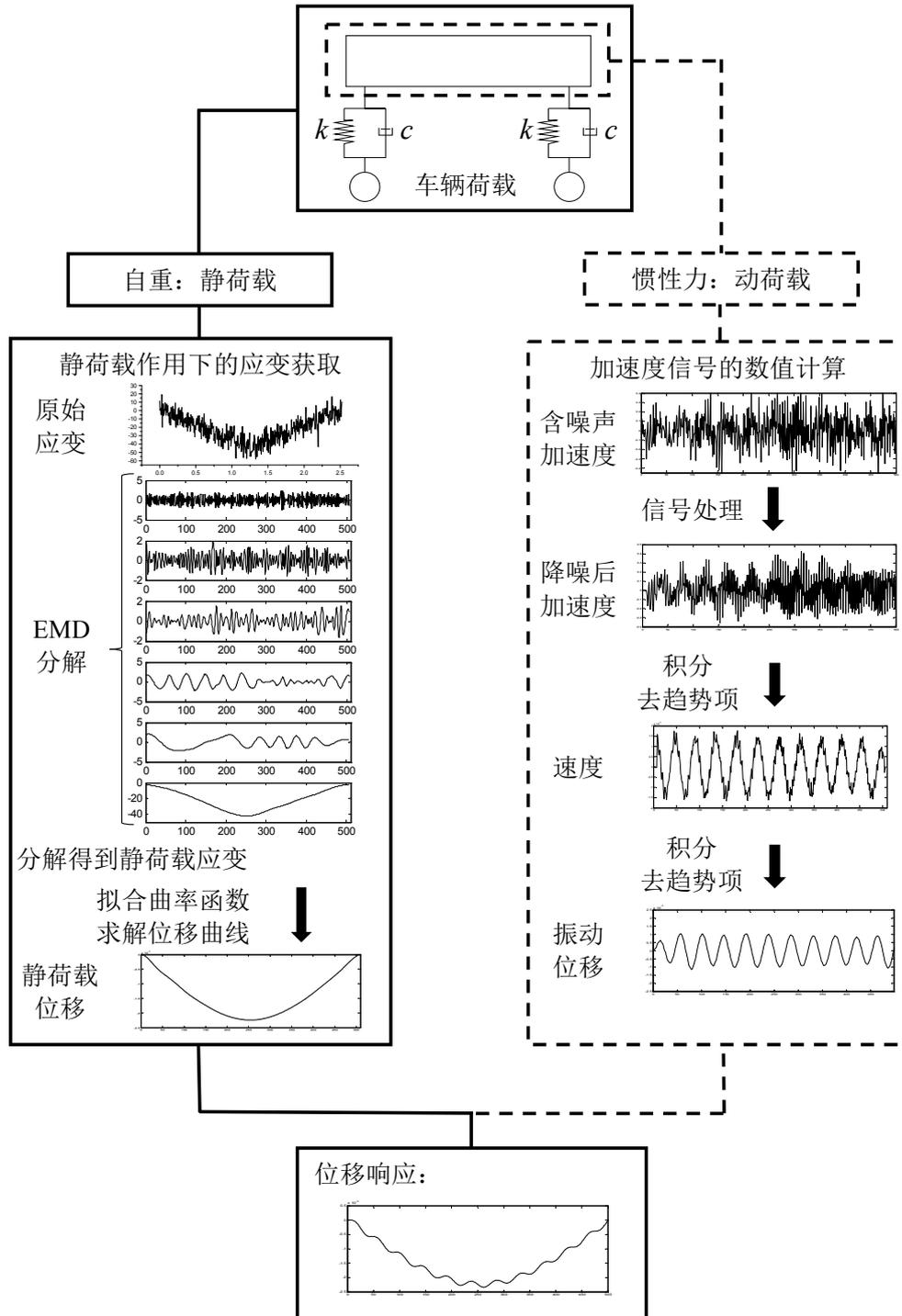


图 3.1 动位移信号的重构

车辆移动荷载模型在通过结构过程中产生的荷载可分为两个部分：第一部分是由整车自重产生的静荷载；第二部分是由车身惯性力产生的动荷载。静荷载作用于结构上产生的位移可以由应变信号进行求解，利用经验模态分解（EMD）的方法对测得的应变信号进行分解，由多个测点的动应变信号可以拟合结构的曲率函数，再根据曲率函数和位移曲线的关系可以转换求解静荷载位移。振动位移的求解是基于加速度信号的 MATLAB 数值积分算法来完成的，根据加速度和位移之间的关系，通过对采集的信号进行降噪、积分、去除趋势项得到速度信号，再进行二次积分得到位移信号，积分过程中根据测点的初始运动状态运用最小二乘法去除积分趋势项，数值积分都是采用频域积分算法。最后将求解的静荷载位移和振动位移进行叠加，得到重构的动位移。

### 3.1 基于应变的静荷载位移识别

对于梁而言，梁的位移  $v$  指的是弯曲变形时横截面在轴线垂直方向产生的挠度，梁轴线在形心主惯性平面内形成的平面曲线称之为挠曲线，应变  $\varepsilon$  是指的结构上一微小单位长度元素承受应力时所产生的变形量，曲率  $k$  则可以表示梁的弯曲变形的程度。在发生弯曲变形的梁上截取任意的一个长度为  $dx$  的微小单元，如图 3.2 所示。

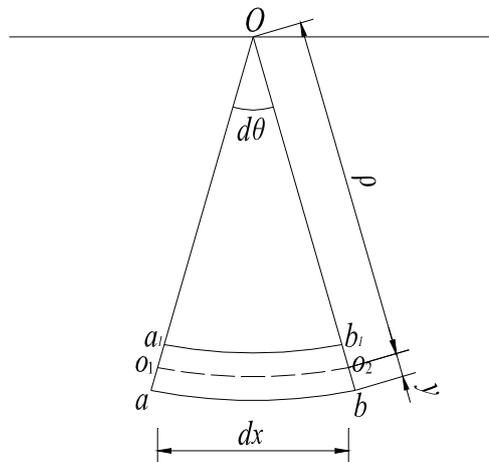


图 3.2 微小单元平面示意图

其中  $O_1O_2$  表示梁单元的中性轴，边缘距离中性轴的距离为  $y$ ， $\rho$  表示曲率半径，梁变形前后的中性轴长度不变，则梁边缘的长度变化量  $\Delta s$  可以表示为：

$$\Delta s = l_{ab} - l_{o_1o_2} = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta \quad (3.1)$$

则应变  $\varepsilon$  的大小可表示为：

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{dx} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (3.2)$$

由上式可以看出，对于同一位置的应变和曲率，二者呈线性关系，由微分定理，挠度和曲率的关系可表示为：

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{d^2v}{d^2x} / [1 + (\frac{dv}{dx})]^{3/2} \quad (3.3)$$

上式称为挠曲线的微分方程，其中  $v$  为以  $x$  为自变量的挠曲线函数，忽略二阶微量  $(\frac{dv}{dx})^2$  对方程的影响，挠曲线方程可写为：

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{d^2v}{d^2x} \quad (3.4)$$

从公式(3.4)中看出，梁的挠曲线方程是对梁曲率函数进行二次积分获得的，而梁同一截面位置曲率与应变为线性关系，因此，应变和挠度之间的关系可以通过曲率进行建立<sup>[60]</sup>。

### 3.1.1 基于平均曲率识别挠曲线

在利用平均曲率<sup>[61]</sup>进行挠曲线的识别前，首先把梁结构沿着轴线方向进行单元的划分，并且假设在每一个单元内，曲率都是呈线性变化的关系，梁单元上曲率的积分结果可以通过中间截面的曲率值与单元的长度乘积获得，再把单元的曲率积分值代入假设的曲率函数表达式中，进而求解出曲率函数，最后对曲率函数进行二次积分获得梁的挠曲线方程，采用这种方式便可以利用平均曲率识别挠曲线。对于同一个梁截面位置，应变和曲率的关系为  $k = \varepsilon / y_0$ ，其中， $y_0$  是测点位置到中性轴的距离，对于对称的梁截面， $y_0$  为截面高度的一半， $\varepsilon$  可以通过应变仪进行测量。

现假定梁结构的曲率函数为多项式，对于简支梁而言，可以假设曲率函数为二次多项式：

$$k(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.5)$$

并且其在每一个单元的曲率积分结果等于单元中间截面曲率值与单元长度的乘积，之后通过带入数值求解函数的表达式。

在式(3.5)中，可以看到该多项式中存在 3 个未知系数  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，因此至少要将整个梁划分为 3 个单元，并且每个单元上布置一个测点进行应变测试，在每个单元上至少求解出一个曲率值后，曲率函数多项式系数计算如下：

$$[\int_{x_n^i}^{x_n^j} (ax^2 + bx + c)dx] / (x_n^j - x_n^i) = k(x_n) \quad (n=1,2,3) \quad (3.6)$$

在式 (3.6) 中， $k(x_n)$  为第  $n$  个单元中间截面的曲率值， $x_n^i$ 、 $x_n^j$  为第  $n$  个单元的始、末横坐标。

显然，如果基于三个单元来对曲率函数多项式求解，误差将会偏大，为减少误差可适当增加单元数。对于单元数超过三个时，可对未知数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  进行方程求解，曲线拟合求解最优解。

得到梁的曲率函数后，利用边界条件和连续条件，通过对曲率函数进行二次

积分可以得到梁结构的挠曲线方程如下：

$$v(x) = \int \int k(x) dx^2 + C_1 x + C_2 \quad (3.7)$$

式(3.7)中， $v(x)$ 为挠曲线方程； $C_1$ 、 $C_2$ 为根据桥梁的边界条件进行确定的积分常数。

考虑桥梁的支座沉降，积分常数  $C_1$ 、 $C_2$  按下式 (3.8) 计算，此时：

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\Delta_l - \int \int k(x) dx^2 |_{x=l} - \Delta_0}{l} \\ C_2 = \Delta_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$\Delta_0$ 、 $\Delta_l$ 是梁的两边界发生的沉降值。

计算多跨桥梁挠曲线时，可将多跨桥梁分解，分别按每跨求取挠曲线，最后叠加求得整个桥梁的挠曲线，如式 (3.9) 所示：

$$v(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) \quad (3.9)$$

### 3.1.2 基于最小二乘曲线识别挠曲线

基于最小二乘法的曲线拟合来对梁结构的挠曲线进行识别<sup>[61]</sup>时，同样需要假定梁的曲率是沿桥梁纵坐标的多项式函数，利用所测得若干位置的应变推算其曲率函数值，通过最小二乘法对曲线进行拟合求出曲率函数，再对曲率函数进行二次积分获得桥梁的挠曲线。

由上面的介绍可知，在梁横截面上安装应变传感器进行应变测量，根据  $k = \varepsilon / y_0$  可计算出此截面的曲率值。通过在梁结构上沿梁纵向布置的  $n$  个测点得到截面的曲率测试数据  $(x_i, k_i)$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ )。通过对这组测试数据进行最小二乘曲线拟合，整个梁结构的曲率函数即可求出。

假设曲率函数的拟合曲线为：

$$k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (3.10)$$

把  $n$  个测点的曲率测试数据  $(x_i, k_i)$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) 代入式(3.10)，得到：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_m x_1^m = k_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_m x_2^m = k_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_m x_n^m = k_n \end{cases} \quad (3.11)$$

方程组 (3.11) 包含  $n$  个方程和  $m+1$  个未知数，是一个超定方程组，简化表达方式如下：

$$Xa = k \quad (3.12)$$

式 (3.12) 中，

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

对上述的方程组进行正则化，可以得到：

$$X^T X a = X^T k \quad (3.14)$$

方程组的最小二乘解其实就是式(3.14)的解。如果系数矩阵  $X^T X$  可逆，则正则方程组有唯一解，即

$$a = (X^T X)^{-1} X^T k \quad (3.15)$$

然而，系数矩阵常常有一个很大的条件数。因而无论采用何种方式对正则方程进行求解，它都将数据误差和中间过程的舍入误差放大，从而导致计算精度的降低。为了避免上述存在的问题，可以采用奇异值分解（SVD）的方法。

根据奇异值分解的理论，可以把矩阵分解为：

$$X = U \Sigma V^T \quad (3.16)$$

其中  $U$  和  $V$  都是正交矩阵， $\Sigma$  是由  $r$  个沿对角线由大到小规则排列的奇异值组成的方阵， $r$  就是矩阵  $X$  的秩。

$(X^T X)^{-1} X^T$  是  $X$  的广义逆，记为  $X^+$ 。 $X^+$  可被奇异值分解为：

$$X^+ = V \Sigma^{-1} U^T \quad (3.17)$$

将式（3.17）代入（3.15）得到：

$$a = X^+ k = V \Sigma^{-1} U^T k \quad (3.18)$$

由广义逆和奇异值分解的方法求得的最小二乘解，即便当  $X$  发生列秩亏损也能给出最较准确的解，在  $a$  求解之后，拟合曲线的每项系数就被求出，曲率函数也随之确定。由静力所引起的挠度值也可以通过曲率函数和挠度的关系求出。

## 3.2 经验模态分解

1998 年美国国家宇航局的 Norden E Huang<sup>[62]</sup>提出了一种非平稳、非线性信号分析的新方法，它的基本思想是通过非平稳信号进行经验模式分解(EMD, Empirical Mode Decomposition)，将信号分解成一系列固有模态函数(IMF, Intrinsic Mode Function)。这样得到的固有模态函数是近似单频的信号。EMD 方法不仅能够获得很高的频率分辨率，而且是基于信号自身的特征进行分解，不需要提前设定基函数。

和其他信号处理方法相比 EMD 具有直观和自适应的优点，在分解过程中所有的基函数都是由原始振动信号产生的。IMF 获取的过程就是把非平稳、非线性振动信号分解成为一系列稳态和线性的序列集，其中每一个 IMF 必须满足两个条件：（1）极值点的个数和过零点的数量相同或最多相差一个；（2）上下包络关于

时间轴局部对称<sup>[63]</sup>。

信号进行 EMD 分解的过程是基于以下三个假设进行的：

- (1) 数据至少有两个极值，一个最大值和一个最小值；
- (2) 局部时域特性通过极值点间的时间尺度唯一确定；
- (3) 如果数据没有极值点但是存在拐点，则可以通过微分对数据求极值，再通过积分得到分解结果。

假设存在一组振动信号的时间序列  $x(t)$ ，EMD 分解步骤如下：

首先，找出振动信号  $x(t)$  所有的极大值点，将其用三次样条函数拟合出原数据的上包络线；找出数据列中所有极小值点，用三次样条函数拟合出下包络线，求出包络线的均值  $m_1(t)$ 。

然后，将原始振动信号  $x(t)$  减去均值  $m_1(t)$  得到一个去掉低频的新的数据序列： $h_1(t) = x(t) - m_1(t)$ ，此时得到的  $h_1(t)$  一般都不会满足 IMF 的条件，因此需要对其重复上面的过程，在进行了  $k$  次的筛选后，直到满足 IMF 分解的要求产生第一个 IMF 分量  $c_1(t)$ ，即  $c_1(t) = h_k(t)$ 。第一个产生的  $c_1(t)$  也就是原始振动信号中具有最高频率的分量。此时，将得到的第一个高频分量  $c_1(t)$  去除，得到剩余的数据  $r_1(t)$ 。

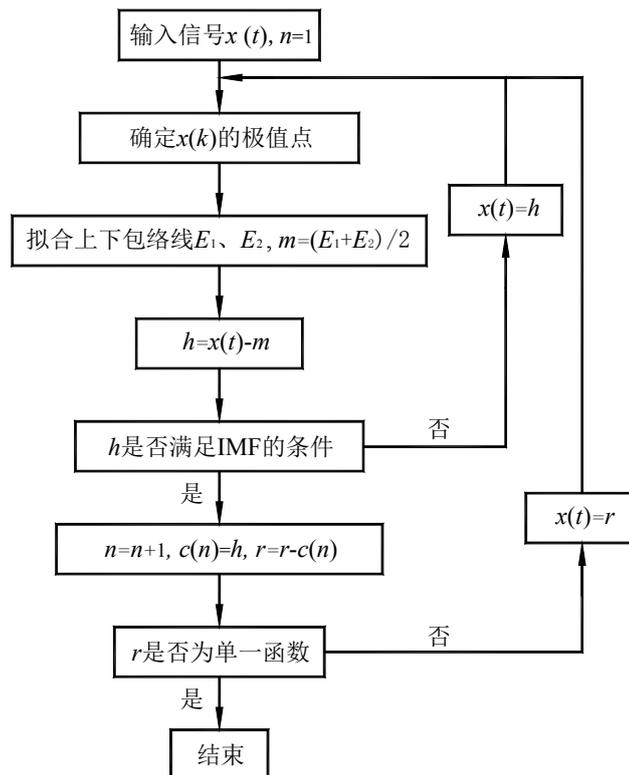


图 3.3 EMD 分解流程

根据上面的步骤，持续对数据  $r_1(t)$  进行筛选，最后得到剩余分量  $r_n(t)$ ，不能继续进行分解，最后的  $r_n(t)$  为残余函数，代表振动信号的平均趋势。通过 EMD 分解后得到的 IMF 包含了从高到低不同频段成分，这些分量以及残余项可以表示成

$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) + r_n(t)$ 。因此, IMF 就是将原始振动信号按照不同的特征尺度将其分解出来, 得到的分量既可以是线性的, 也可以是非线性的<sup>[64]</sup>。EMD 分解的流程如图 3.3 所示。

EMD 方法将信号通过不同尺度特征的固有模态函数表示, 在任意时刻, 固有模态函数具有唯一频率。因此, 通过 EMD 方法, 可以得到信号的时间特征和频率特性, 这样通过瞬时频率, 可以有效地描述信号的局部特性。同时, 它克服了传统方法的缺点, 能自适应对不同信号的非平稳特征进行分析, 但在 EMD 分解过程中, 仍然存在模态混叠、端点效应等问题。

### 3.3 积分算法理论研究

虽然理论上已经有很多种测试位移和速度的设备和方法, 但是在实际测试过程中, 由于受到诸多的限制, 通过这些方法测试位移仍然遇到很多困难, 仅仅能够测得相对位移<sup>[65]</sup>。而对于许多的研究来说, 绝对位移才是真正需要测量的值。而相比较绝对位移的测量而言, 加速度信号的测量较为容易实现而且测量得到的信号精度较高, 因此相对于位移和速度测试来说, 加速度测试在工程实际中应用更为广泛, 测试技术也更为成熟。

下文中通过对积分过程的讨论, 阐述了加速度积分趋势项误差的产生原因, 此外, 通过对积分算法进行理论公式上的推演, 阐明了如何控制时域和频域两种积分算法的趋势项误差; 数值积分的过程中, 常常由于趋势项误差的干扰导致计算结果错误, 达不到获得振动位移的目的, 在目前的研究中, 如何有效控制积分误差是积分算法研究的难点所在。

#### 3.3.1 时域积分算法推演

时域逐步积分算法<sup>[66]</sup>是一种信号处理有效的方法。时域积分算法根据计算过程中是否要求解耦联方程组的条件又分为隐式积分与显式积分方法。其中不需要进行耦联方程组求解的方法叫做显示积分法, 它的特点是计算量比较小, 但是由于受到稳定性的限制, 积分的步长不宜过大; 另一种要求解耦联方程组的方法叫做隐式积分法, 隐式积分算法的计算量大, 但是它的计算步长可以取得较大而不受稳定性的控制。在目前的研究中, 这两种积分方法的使用有许多的交集, 在计算模型较为简单、计算自由度较少的条件下, 二者计算消耗的时间与占用的内存相差不大, 实际使用过程中需要根据经验决定哪一种积分方法更加合适, 可以兼顾计算效率和计算精度。

对于一组由加速度信号积分到位移的信号, 假设测试得到的加速度信号为  $a(t)$ , 则通过时域一次积分, 可以得到速度信号<sup>[66]</sup>:

$$v(t) = \int a(t)dt = v'(t) + v_0 \quad (3.19)$$

经过两次时域积分后，位移信号为：

$$s(t) = \int v(t)dt = s'(t) + s_0 \quad (3.20)$$

式中  $v(t)$ ， $s(t)$  为理论待求速度和位移， $v_0$ ， $s_0$  分别为初速度和初位移， $v'(t)$ 、 $s'(t)$  为速度和位移的原始函数。

与理想状态不同，在工程中实际测量得到的信号中，除了有用信号之外，还包含由各种干扰因素引起的直流误差项，由测试得到的加速度信号可以表示为：

$$a(t) = f(t) + \delta \quad (3.21)$$

对式 (3.21) 的加速度信号表达式进行一次积分，可得到速度表达式：

$$v(t) = \int a(t)dt + v_0 = \int (f(t) + \delta)dt + v_0 = \int f(t)dt + \delta t + \varepsilon + v_0 \quad (3.22)$$

其中在加速度中包含的误差项  $\delta$  通过一次积分运算后被放大，当初始速度无法进行确定的时候，会产生速度趋势项，由此可以得到含噪声信号经过一次积分后结果中的误差为： $\delta t + \varepsilon$ 。

将式(3.22)再次进行积分运算可以得到位移信号的表达式：

$$s(t) = \int v(t)dt + s_0 = \int (\int f(t)dt + \delta t + \varepsilon + v_0)dt + s_0 \quad (3.23)$$

从积分的结果可以看出，加速度信号经过二次积分后信号中的误差部分继续被放大，其中一次积分结果的速度信号出现误差趋势项  $\delta t + \varepsilon$ ，二次积分位移信号出现了误差趋势项  $0.5\delta t^2 + \varepsilon t + e$ ，对于普通的趋势误差可以通过多项式拟合的方法进行去除。

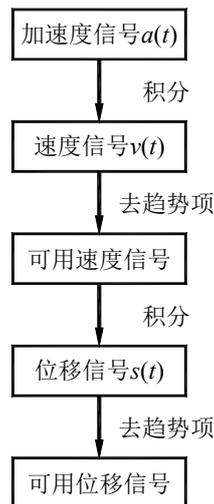


图 3.4 多项式拟合积分算法的流程图

### 3.3.2 频域积分原理

信号的时域表达和频域表达方式分别从时、频两个不同的角度揭示了信号的物理特征，信号的时域表达往往不能满足研究的目的，在对信号进行分析的时候，

可以通过傅立叶变换将信号从时域转换到频域，使信号变得直观明了，时频转换的一个重要步骤就是信号的傅立叶变换，再通过将时域内的积分转换为频域计算，在频域内进行运算后再通过傅立叶逆变换将信号从频域还原到时域，并取其实部就可以得到信号在时域的位移值<sup>[67]</sup>。

假设存在一个数据长度为  $N$  的时域离散加速度数列  $a(n)$ ，按照式 (3.24) 进行离散的傅立叶变换：

$$\begin{cases} a(k) = \frac{2}{N} \sum_1^N a(n) e^{\left[ \frac{-2\pi(k-1)(n-1)i}{N} \right]} = a_k + b_k i \\ f(k) = \frac{(n-1)f_0}{2N} \end{cases} \quad (1 \leq k \leq N) \quad (3.24)$$

其中  $a(k)$  为傅立叶变换后的频域内复数序列， $f(k)$  为对应的频率， $f_0$  为采样频率。

与  $a(k)$  对应的简谐波幅值大小  $A_i$ 、圆频率  $\omega_k$  以及初相位角可以通过式 (3.25) 求出：

$$\begin{cases} A_i = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \phi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \\ \omega_k = 2\pi f_k \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\text{其简谐波表达式为：} \quad a(t)_k = A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (3.26)$$

通过两次积分后可以得到该频率下位移谐波如式 (3.27) 所示：

$$S(t)_k = A_{sk} \cos(\omega_{sk} t + \phi_{sk}) \quad (3.27)$$

其中： $A_{sk} = A_k / \omega_k^2$ ， $\phi_{sk} = \phi_k - \pi$ ， $\omega_{sk} = \omega_k$ 。

由信号叠加的原理，可得位移曲线如式 (3.28) 所示：

$$S(t) = \sum_{k=1}^N S(t)_k = \sum_{k=1}^N A_{sk} \cos(\omega_{sk} t + \phi_{sk}) \quad (3.28)$$

通过傅立叶逆变换，上式可以表示为：

$$F(s(t)) = H_\varepsilon(\omega) F(\bar{a}(t)) = -\frac{1}{\omega^2} F(\bar{a}(t)) \Rightarrow s(t) = -F^{-1} \left[ \frac{1}{\omega^2} F(\bar{a}(t)) \right] \quad (3.29)$$

其中  $F(x)$  表示对函数进行傅立叶变换， $H_\varepsilon(\omega)$  表示传递函数， $\bar{a}(t)$  表示实际测量得到的加速度信号， $s(t)$  表示积分得到的位移信号。

从式 (3.29) 中可以看出，在相同的频率成分下，加速度信号和其表征的位移信号的幅频特性为  $1/\omega^2$ 。因此在积分过程中，加速度信号中包含的低频噪声会被放大，噪声频率越低，引起的误差就越大，同时高频的噪声在积分过程中所带来

的影响较小，频率越高误差越小。由此可知，如果要减小位移信号的积分误差，可以通过减小加速度信号中的噪声来控制误差。

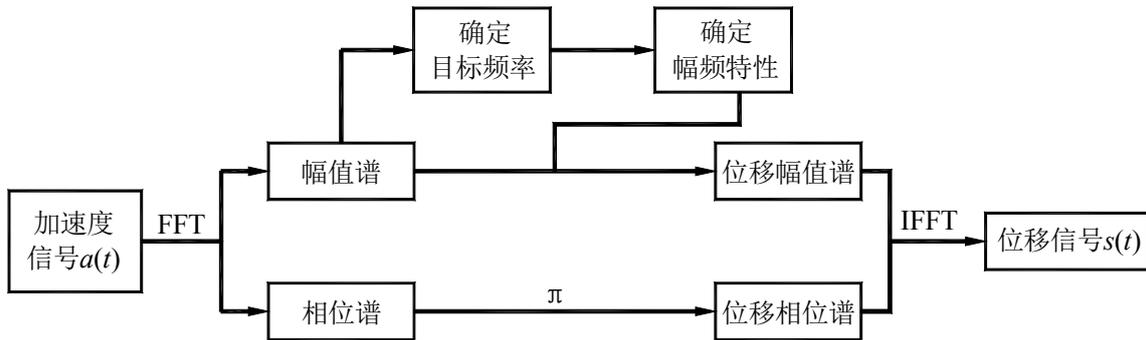


图 3.5 低频截止积分算法流程图

### 3.3.3 积分算法误差评价

为了能够直观方便地评价加速度数值积分算法得到的位移  $S'(t)$  与实际位移  $S(t)$  之间的误差，引入了峰值误差和相对误差对结果进行评价。

峰值误差定义为积分位移结果  $S'(t)$  与实际位移  $S(t)$  在曲线最大值点和最小值点差值的平均值，函数表达如下<sup>[68]</sup>：

$$E_{r1} = \frac{1}{2} \times \left\{ \left| \frac{\max[S'(t) - S(t)]}{\max[S(t)]} \right| + \left| \frac{\min[S'(t) - S(t)]}{\min[S(t)]} \right| \right\} \times 100\% \quad (3.30)$$

相对误差定义为在整个时间范围内  $S'(t)$  和  $S(t)$  的差值平均值，函数表达式如下：

$$E_{r2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|S'(t) - S(t)|}{|S(t)|} \times 100\% \quad (3.31)$$

## 3.4 信号的处理方法

利用传感器和数据采集仪进行振动测试的时候，由于测试过程中各种因素的影响，输出过程中必然夹杂着许多不需要的成分。因此所得信号还需要进行加工处理，修正波形的畸变，剔除信号中的噪声和干扰，使采集的信号尽可能真实地还原成为与实际情况相符的信号。

含噪声的时域信号可以通过计算机对其波形进行分析和处理。时域处理的重要内容之一是对信号进行降噪滤波，这个过程可以通过信号的数字处理方法来实现，通过滤除噪声保留实测信号中的有用成分来达到目的。

信号的频域处理方法也称为频谱分析，这一方法是以傅立叶变换为基础，对信号进行时-频变换，变换后得到的结果是基于频率为变量的函数，称之为谱函数。傅立叶变换后的信号，它的实部可以转换成幅值谱，虚部可以转换为相位谱。

### 3.4.1 小波变换信号优化

目前, 根据噪声的统计特性和频谱分布的规律, 人们已经开发了多种多样的信号降噪方法, 根据信号频谱一般分布在一个有限区间的特点, 通过傅立叶变换把信号从时域变换到频域, 再利用特定的数字滤波器进行滤波来达到降噪的目的。这种降噪的方法对于有用信号与噪声频带相差较多时候效果明显, 但当有用信号和噪声处于相同频带的时候效果有限, 因为此时数字滤波器在降噪的同时也将信号的有效成分剔除了, 因此基于傅立叶变换来进行降噪的方法存在抑制噪声和保护信号局部特性的矛盾, 成为了其在应用过程中的局限, 而小波降噪能够克服这种局限性, 因此得到越来越广泛的应用。

20 世纪 80 年代, 提出了一种叫做“时频联合分析方法”, 又叫做小波分析法, 它克服了傅立叶变换中时域信号的突变在频域不能反映出来的缺陷, 在去除信号中高频噪声的同时能够较完整地保留信号中有用的高频成分。它的特点是: 在低频部分频率分辨率很高, 时间分辨率较低; 在高频部分时间分辨率较高, 频率分辨率较低。小波的这种特性, 使得它对信号具有自适应性的特点, 这也是相较于经典傅立叶变换和短时傅立叶变换所具有的优越性。小波变换具有更好的时频特性<sup>[69]</sup>。

Donoho<sup>[70]</sup>提出了利用小波阈值降噪的方法, 这种方法实现起来过程简单, 而且效果很好。

概括的来说可以通过以下三步达到信号降噪的目的<sup>[71]</sup>:

(1) 将信号进行小波分解: 首先确定信号的分解层数, 再对这个小波信号进行  $N$  层的小波分解。

选择小波函数  $\psi$ , 对观测信号进行离散小波变换, 得到其各尺度的小波系数:

$$D_j = \{d_{jk} \mid 0 \leq k \leq 2^{-j} N\} \quad (0 \leq j \leq J) \quad (3.32)$$

和分辨率最大层的逼近系数 (低频部分):

$$S_j = \{S_{jk} \mid 0 \leq k \leq 2^{-j} N\} \quad (3.33)$$

其中:  $J$  为分解层数, 一般有  $J \leq \log_2 N$ ,  $N$  是信号长度。

(2) 对分解后的高频系数进行阈值的定量处理。对每一层的高频系数选一个阈值进行具体量化处理, 即:

$$\tilde{d}_j = \{\tilde{d}_{jk} = \rho(d_{jk}, a_j) \mid 0 \leq k \leq 2^{-j} N\} \quad (1 \leq j \leq J) \quad (3.34)$$

其中:  $a_j > 0$  为  $j$  尺度下小波系数的阈值,  $\rho(\cdot)$  为阈值处理函数。

(3) 重新建立一维小波。由小波分解得到的一个  $N$  层低频系数以及处理后的量化水平 1 至  $N$  层的高频系数实现小波重构。在信号降噪的过程中, 阈值的选择通常是由原信号与其噪声信号的比值来决定的, 我们可以通过求取每一层小波

系数的标准差来得到。对经过阈值处理的小波系数和逼近系数按照正交小波分解的重构公式进行重构。

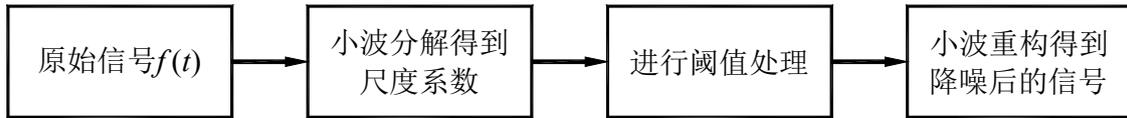


图 3.6 小波降噪的流程图

在以上过程中通过对小波基、分解尺度、阈值函数进行合理的选取，可以达到期望的降噪效果<sup>[72]</sup>。

### 3.4.2 自适应降噪

自适应滤波器与传统的滤波器不同，它具有主动适应外部环境的特点，能够通过自主学习来自动调整自身参数，即所谓的自适应的能力。一般来说，自适应滤波器能够依据某种预先设定的准则，并以此为依据在迭代过程中调整自身的参数或结构，去跟踪并适应环境的变化，以达到在此准则下最佳的滤波效果<sup>[73]</sup>。

自适应滤波器的组成有两个部分，主要包括自适应算法和滤波子系统。其中滤波子系统并没有固定的结构形式，往往随它的处理功能而改变其结构形式。另一个是自适应算法部分，它的主要功能是对滤波子系统参数或者系数进行调节。通过调整可以达到在相应准则下误差的最小化。

自适应降噪的原理如图3.7所示。图中基本信号 $x(n)$ 为有用信号 $s(n)$ 和干扰噪声 $v_0(n)$ 之和，即 $x(n)=s(n)+v_0(n)$ ，其中 $n$ 代表时间， $v_1(n)$ 代表的是参考信号，它是一个与 $s(n)$ 无关，但与 $v_0(n)$ 相关的噪声信号。以当前及其前一时刻的参考信号为输入矢量，即 $V_1(n)=[v_1(n), v_1(n-1), \dots, v_1(n-N+1)]$ ， $N$ 表示阶数的大小。通过对自适应滤波器的权系数矢量 $W(n)=[w_0(n), w_1(n), \dots, w_{N-1}(n)]$ 进行不断的调整，使得输出信号 $y(n)$ 尽量逼近 $x(n)$ 中的噪声 $v_0(n)$ ，此时， $y(n)$ 与 $x(n)$ 之差 $e(n)$ 就接近于有用信号 $s(n)$ 。

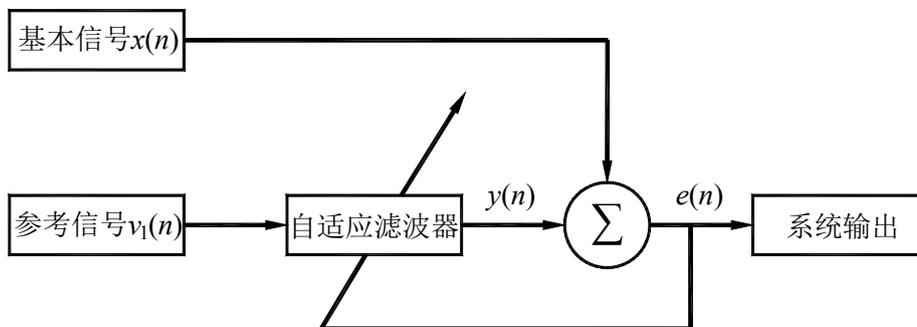


图 3.7 自适应滤波器降噪原理结构图

LMS 算法是在维纳滤波的基础上，基于最小均方误差（MMSE）和最陡下降法的思想发展起来的，是以最小均方误差为判断标准的算法，即理想信号  $d(n)$  和

输出信号  $y(n)$  之差  $e(n)$  的平方值的期望最小，并以此为依据修改权系数  $w_i(n)$  而产生的算法。Widrow 提出的 LMS 算法适用性很广，目前的绝大多数自适应滤波器都是采用这个算法作为滤波的基础，LMS 算法的特点是设计和实现都比较简便，能够适用很多场合<sup>[73]</sup>。

由 LMS 算法进行滤波的主要过程如下：

(1) 计算时刻  $n$  自适应滤波器的输入矢量与权系数矢量的卷积积分，得到输出信号  $y(n)$ ，即：

$$y(n) = V_1(n)W^T(n) \quad (3.35)$$

(2) 计算基本信号与输出信号之差，得到误差信号  $e(n)$ ，即：

$$e(n) = x(n) - y(n) = x(n) - V_1(n)W^T(n) \quad (3.36)$$

(3) 利用最速下降法，得到自适应滤波器在  $n+1$  时刻的权系数：

$$w_k(n+1) = w_k(n) + 2\mu e(n)v_1(n-k) \quad (k=0,1,2,\dots,N-1) \quad (3.37)$$

式中  $w_k(n+1)$  表示迭代后  $n+1$  时刻的权系数， $w_k(n)$  表示迭代前  $n$  时刻的权系数， $\mu$  表示步长因子，又称作收敛因子，通过调整  $\mu$  的取值可以对滤波的速度进行控制。

(4) 重复上述步骤(1)~(3)，一直到  $n+1$  时刻，通过不断地进行迭代、更新权系数，最终可以使误差信号的均方差  $E[e^2(n)]$  达到最小，此时  $E[v_0(n) - y(n)^2]$  同样达到最小值。此时的输出信号  $y(n)$  逼近基本信号中的干扰信号  $s(n)$ 。因此，自适应滤波的方法不是以频率为基础来进行滤波的，当基本信号中存在与参考信号的某些频率相近的成分时，基本信号中的有用信号并不会被过滤掉。

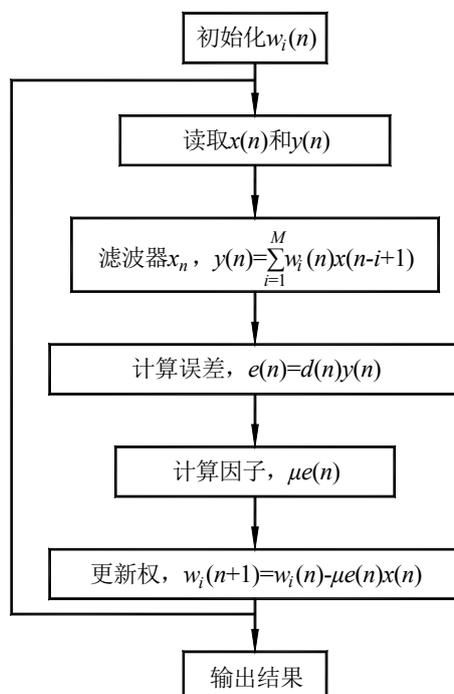


图 3.8 LMS 算法流程图

从上述 LMS 算法的主要计算流程可以看出，影响其各项性能的主要参数有

滤波器阶数、步长因子和权值的初始值，通过对这些参数进行调整，可以得到更快的收敛速度、更小的稳态误差和更低的计算复杂度。

(1) 滤波器阶数：在设计滤波器时，如果滤波器阶数选择过小，称之为欠滤波长度，会导致最终的输出结果存在较大的误差，甚至会导致 LMS 算法的发散，因此，在选择滤波器阶数时可以选择一个较大的值，以满足不同输入对滤波器长度的要求，而较大的阶数取值会在一定程度上会增加计算量。

(2) LMS 算法的收敛是需要满足一定条件的。只有在满足收敛条件  $0 \leq \mu \leq 1/\lambda_{\max}$  时，才能任意选择步长因子，其中  $\lambda_{\max}$  是输入信号自相关矩阵的最大特征值。步长因子不仅影响着算法的收敛速度而且决定着算法的稳态误差。当选择较大的步长因子时，可以加快算法的收敛，当选择较小的步长因子时，算法的收敛速度较慢。在滤波器阶数  $m$  一定的情况下，步长大则稳态误差大，步长小则稳态误差小。因此对于固定参数的 LMS 算法来说，较快的收敛速度和小的稳态误差是矛盾的，需要根据实际情况进行合理的取值。

(3) 虽然 LMS 算法的各个参数对初始值  $w_0$  没有直接的影响，但是为了使权矢量能够以最快的方式趋近最优解，在滤波器阶数、步长因子和信号不变的情况下，初始权矢量越接近维纳解，则整个权矢量的收敛时间将越短。但是，在实际情况中，输入信号是多变的，使得维纳解随着输入信号状态的变化而变化，这些信号的先验信息在实际中是不能获得的。因此，本文在对 LMS 算法研究时，初始权值全部假定为零状态。

## 3.5 MATLAB 信号处理方法的实现

### 3.5.1 两种积分算法的实现及对比

为了对上文中提到的两种积分算法控制趋势项的结果进行验证，以及探究积分过程中参数选择对结果的影响，下面通过算例进行说明，并对两种算法的积分效果进行了对比。

假设一组加速度信号如下式 (3.38) 所示：

$$a(t) = 7.5 \sin(12.8\pi t) + 11.6 \sin(36.8\pi t) + 6.2 \sin(58\pi t) \quad (3.38)$$

由积分的理论可以知道，其对应的位移信号  $s(t)$  如式 (3.39) 所示：

$$s(t) = -\frac{7.5}{(12.8\pi)^2} \sin(12.8\pi t) - \frac{11.6}{(36.8\pi)^2} \sin(36.8\pi t) - \frac{6.2}{(58\pi)^2} \sin(58\pi t) \quad (3.39)$$

加速度信号通过 1000Hz 的采样频率采样过后取 3s 的信号长度作为计算数据，采集的加速度信号时间历程如图 3.9 所示，对加速度信号进行傅立叶变换得到其幅频特性如图 3.10 所示。

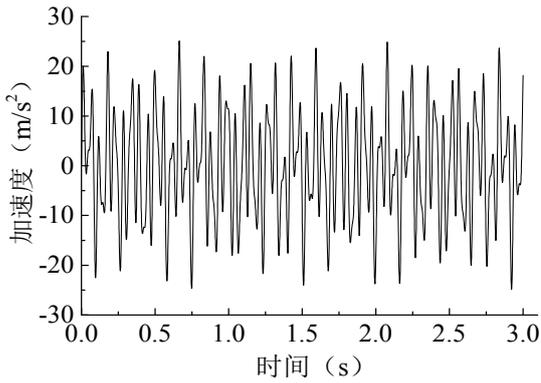


图 3.9 加速度信号

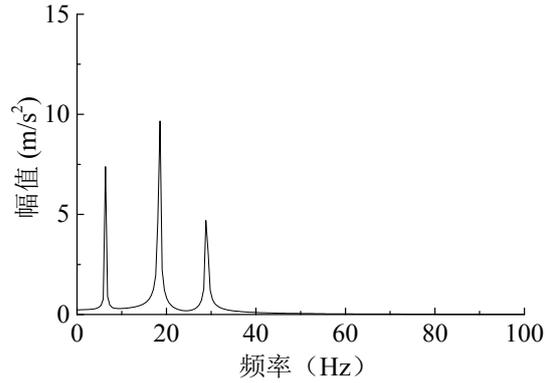
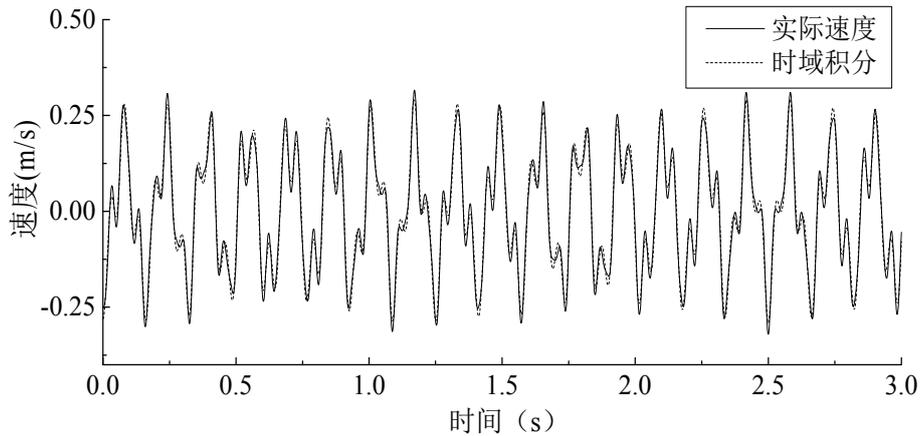
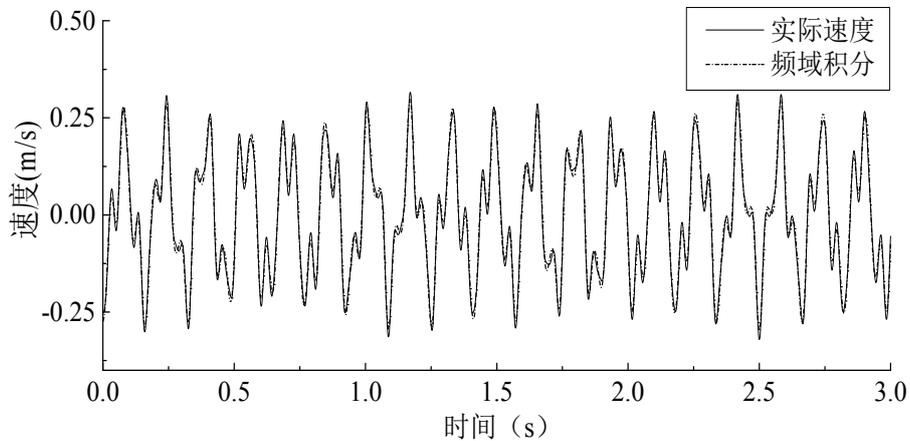


图 3.10 加速度信号幅频特性



a) 时域积分



b) 频域积分

图 3.11 速度积分结果

对于加速度曲线分别用时域积分和频域积分的方法进行计算，可以得到速度曲线，由于初始的直流分量为零，可以通过最小二乘法对趋势项进行拟合，再进行信号去趋势项得到可用的速度信号，通过速度信号再次积分得到位移信号，同样由最小二乘法去除趋势项得到可用的位移信号，速度和位移的积分结果分别如图 3.11、图 3.12 所示。

从积分的结果可以看到，由加速度信号经过一次积分得到的速度信号，不管是频域积分还是时域积分计算的结果都较为准确，从表 3.1 中给出的一次积分误

差值可以看出时域积分和频域积分的峰值误差分别为 0.22%和 0.20%，相对误差分别为 0.38%和 0.21%，通过最小二乘法去除趋势项的效果明显，积分信号并未产生较大的漂移现象，在速度积分的结果基础上继续进行第二次积分得到位移信号，从图 3.12 中的对比可以明显看出频域积分比时域积分的结果更好，频域积分的位移信号整体并不存在趋势项，相对误差为 0.09%，整体曲线与实际位移的曲线十分接近，在峰值处的位移值与实际位移仅存在 0.02%的最大误差，而时域积分的位移结果中残留了明显的趋势项，该趋势项由于在积分速度结果中未能通过最小二乘法拟合去除，在下一步速度积分到位移的过程中累积了下来。

积分方法的误差对比中可以发现，频域和时域两种积分方法经过二次积分后的位移曲线相对误差值比一次积分的误差值得到了明显的减少，由于高频噪声在有限的采样时间内更容易实现完整周期的采样，因此高频噪声的影响会随着积分次数的增加而减小，而两种积分方法产生的峰值误差值都较小，整体的趋势与实际曲线一致。由信号的积分过程可以看到，即便非常小的低频分量仍然能够对积分结果产生较大的影响，甚至使信号失真。

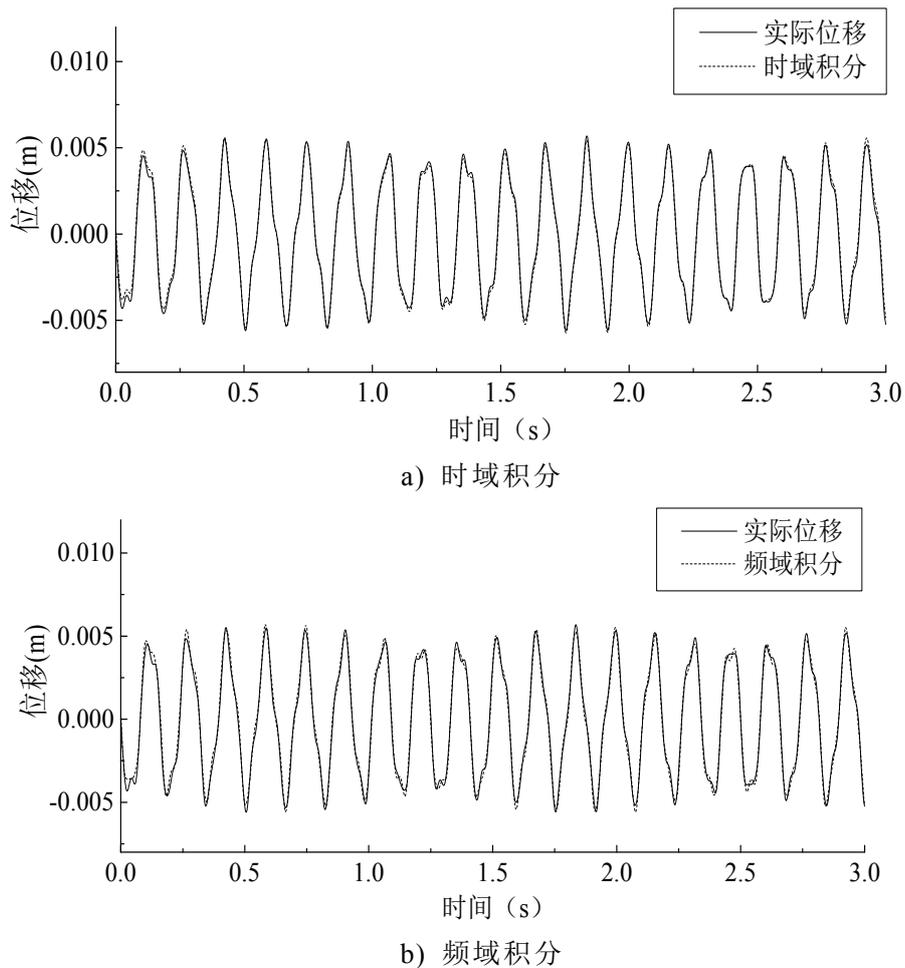


图 3.12 位移积分结果

表 3.1 积分误差对比

积分次数	时域积分		频域积分	
	$E_{r_1}(\%)$	$E_{r_2}(\%)$	$E_{r_1}(\%)$	$E_{r_2}(\%)$
一次	0.22	0.38	0.21	0.21
二次	0.05	0.16	0.02	0.09

### 3.5.2 信号降噪处理

传统降噪方法的不足在于使信号变换后的熵增高，无法刻画信号的非平稳特性，无法得到信号的相关性，下面我们将通过一组阶跃信号（信号 1）和一组多个正弦的叠加信号（信号 2）来考察 LMS 方法对不同含噪声信号的处理效果，首先利用 MATLAB 中的 randn 函数产生强度为 5dB 的高斯分布白噪声，再将产生的高斯白噪声与数字信号进行叠加形成混合信号，分别用 LMS 降噪方法和小波阈值降噪方法进行信号降噪，证明两种方法的可行性并进行误差对比，信号 2 进行降噪处理后，再利用上面所提到的 MATLAB 数值积分算法考察降噪后的信号 2 是否能够准确还原成位移信号。

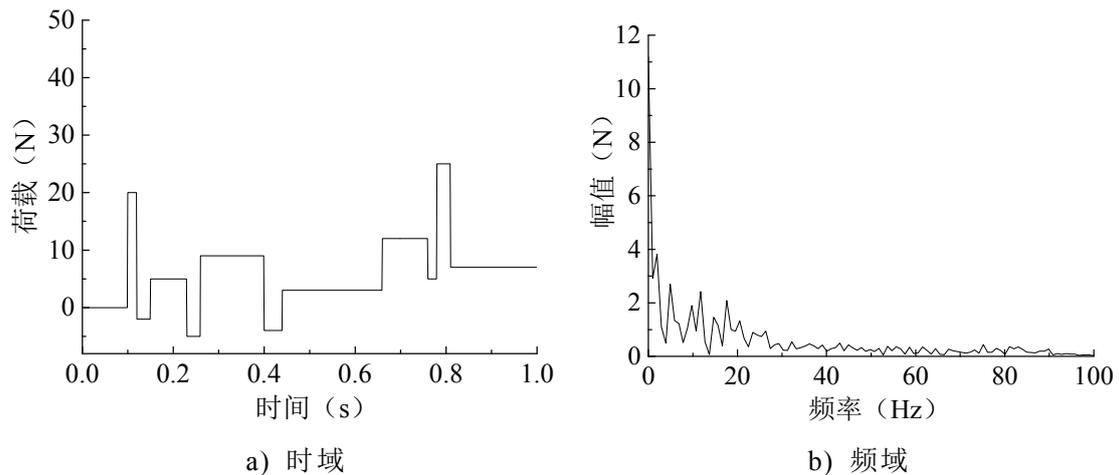


图 3.13 原始信号 1

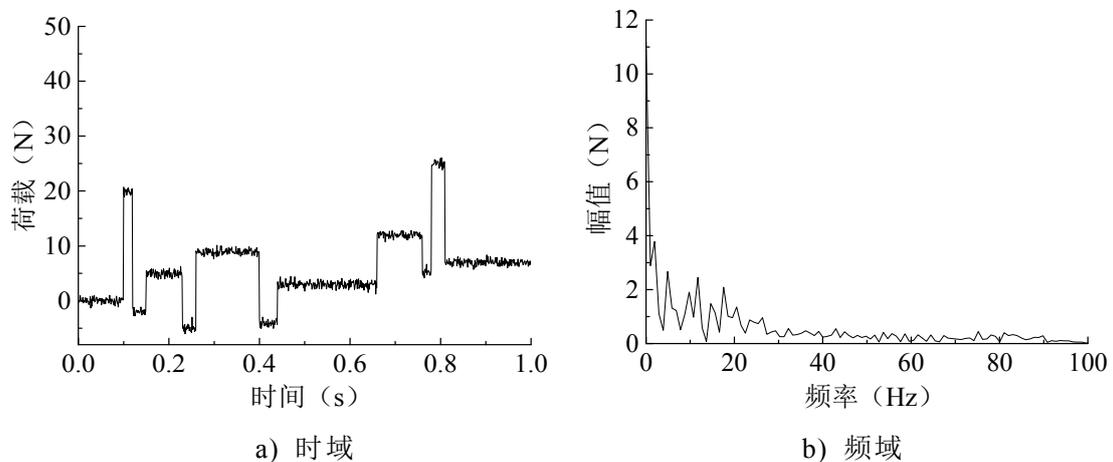


图 3.14 添加噪声信号 1

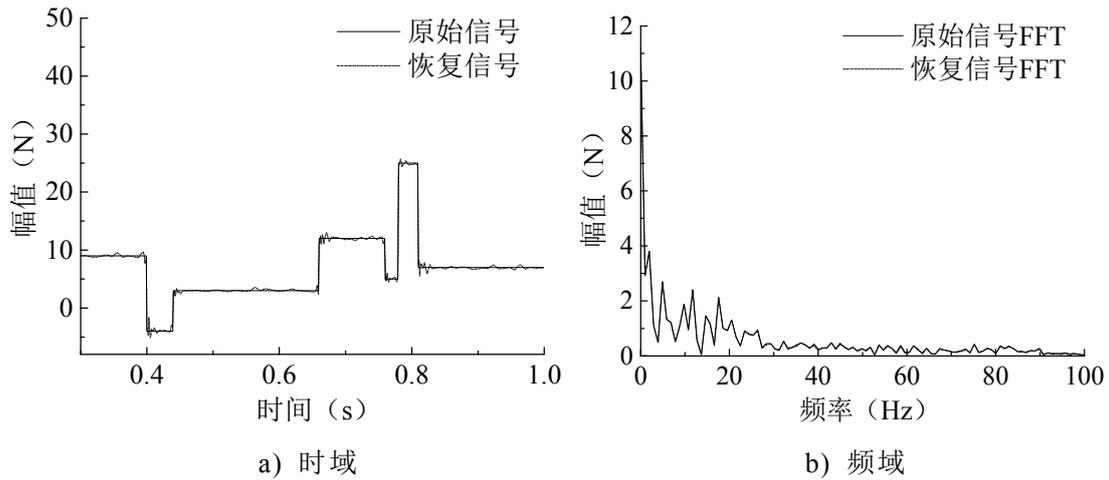


图 3.15 小波降噪后信号 1

从这一组阶跃信号的傅立叶频谱我们可以看出，虽然傅立叶分析在处理信号中能将时间域内的复杂信号转换为频率域内频谱密度的分析，但它描绘的是整个时间段内的频率特性，没有刻画特定时间或特定频率段内的信号特性，因此传统的降噪方法对于非平稳信号的处理具有一定的局限性，而小波降噪的方法在保留傅立叶分析优点的基础上，较好地解决了时间和频率分辨率的矛盾，在频域与时域中能够同时具有良好的局部化特性，可进行局部分析，算例中采用了 MATLAB 小波工具箱中的 `wden` 函数进行降噪，`wden` 函数可以进行一维信号的小波消噪处理，设置采用固定阈值形式 `sqtwolog`，且阈值处理不随噪声变化，阈值的大小为  $\sqrt{2\log N}$ ，其中  $N$  为信号的长度，小波函数选用 Daubechies 小波系中的 `db3`，Daubechies 小波系是由法国的学者 Daubechies<sup>[74]</sup>提出的，它是一系列二进制小波的总称，在 MATLAB 中记为 `dbN`， $N$  为小波的序号， $N$  值取 2,3,...,10，小波函数  $\psi$  与尺度函数  $\phi$  的有效支撑长度为  $2N-1$ ，消失矩为  $N$ 。`dbN` 小波具有较好的正则性，使信号重构的结果比较光滑。从图 3.15 中降噪的结果来看，滤波达到了不错的效果，在阶跃信号的上升和下降沿的失真比较小，保留了信号在突变位置的信息，只有少部分的高频噪声残留。基于 LMS 的自适应降噪采用 100 阶滤波，0.001 的步长因子进行迭代，在处理非平稳信号中也有不错的效果，在 0.5s 计算结果收敛后，能明显看到降噪的效果，权值和均方误差都在最优值的附近波动，降噪后的信号变得平滑，而且在突变位置最大程度保留了信号的细节信息。

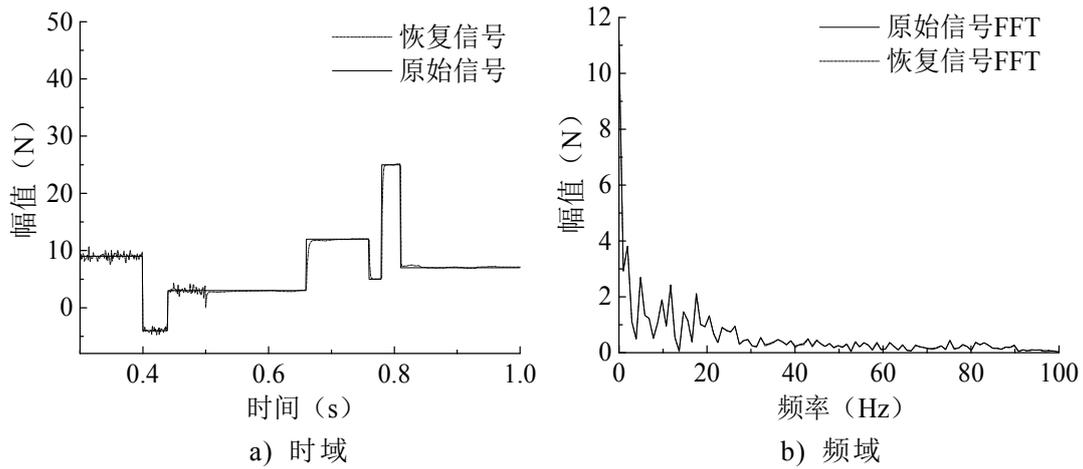


图 3.16 LMS 降噪后信号 1

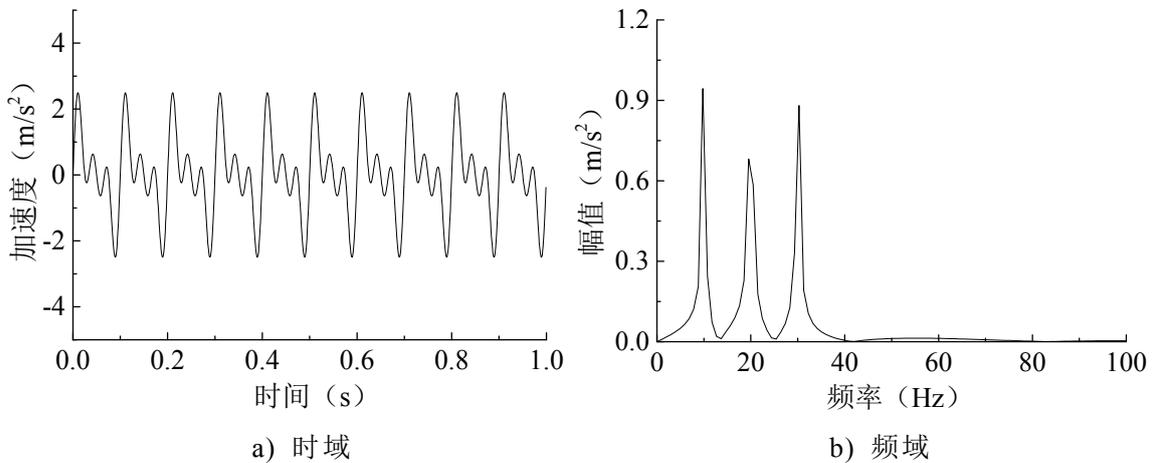


图 3.17 原始信号 2

对于由多个正弦函数叠加形成的信号  $y = \sin(20\pi t) + \sin(40\pi t) + \sin(60\pi t)$ ，如图 3.17 所示，同样通过 MATLAB 对其添加高斯白噪声，形成带噪声的混合信号如图 3.18 所示。采用与信号 1 相同的方法进行小波阈值降噪和 LMS 降噪，得到降噪后的结果如图 3.19 和 3.20 所示，从两种降噪方法处理后得到的信号频谱中可以发现，原有的低频噪声对应的幅值受到了很大的削弱，高频部分几乎与原有信号相同，表明降噪后的信号平滑程度较好。

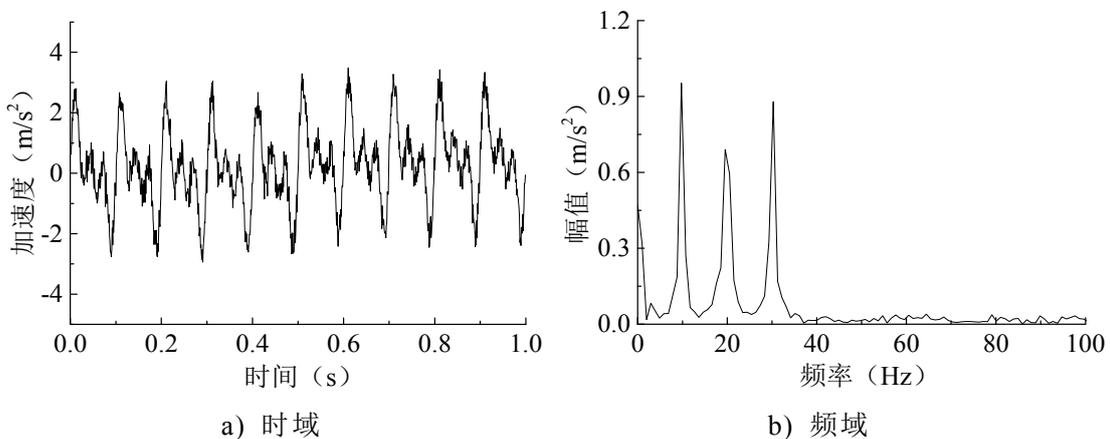


图 3.18 添加噪声的信号 2

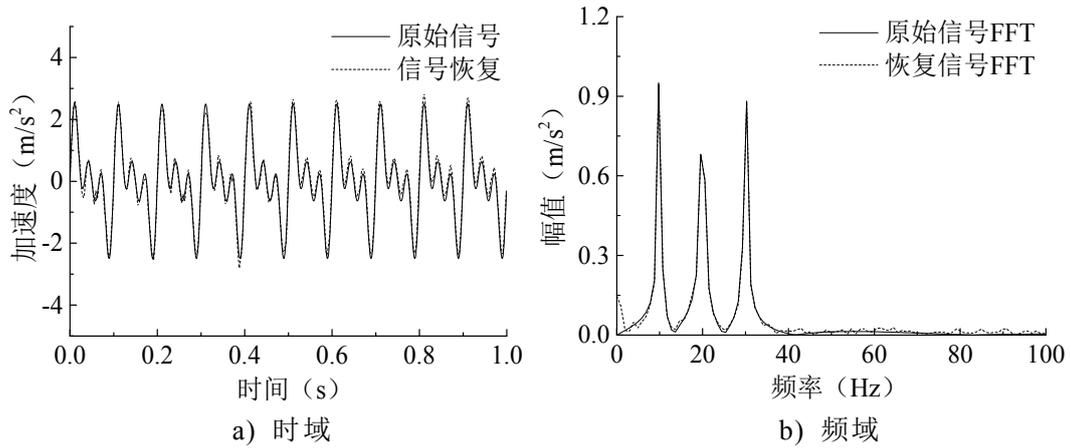


图 3.19 信号 2 的小波降噪结果

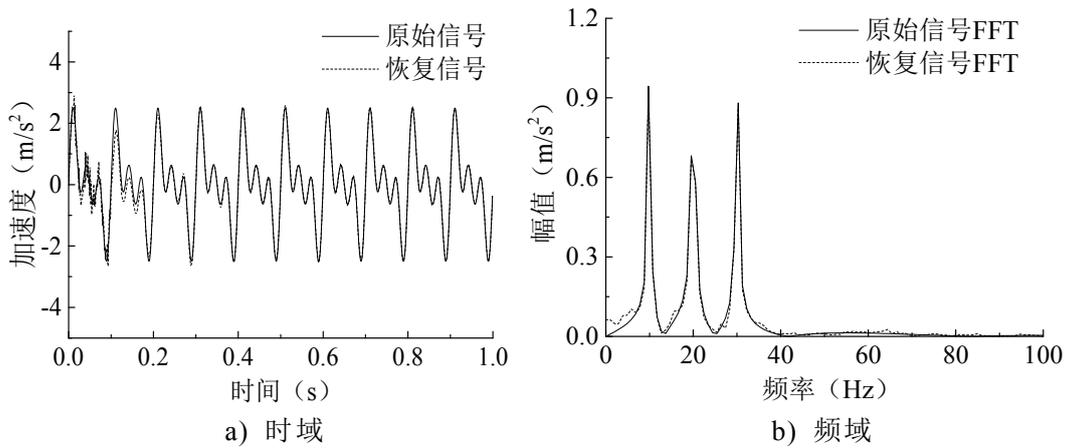


图 3.20 信号 2 的 LMS 算法降噪结果

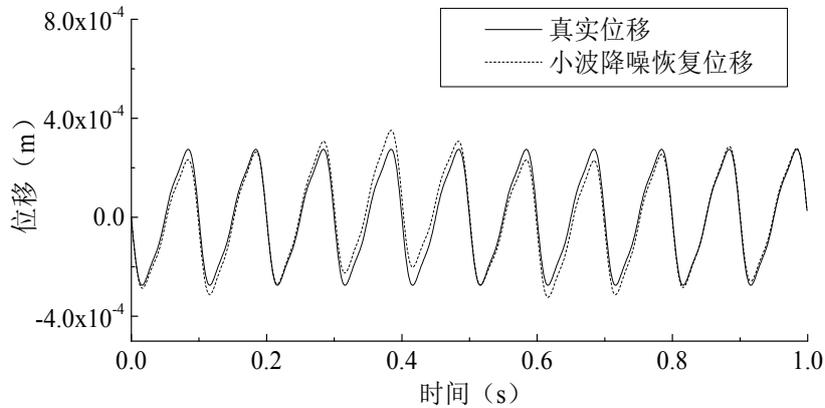


图 3.21 小波降噪后恢复的位移

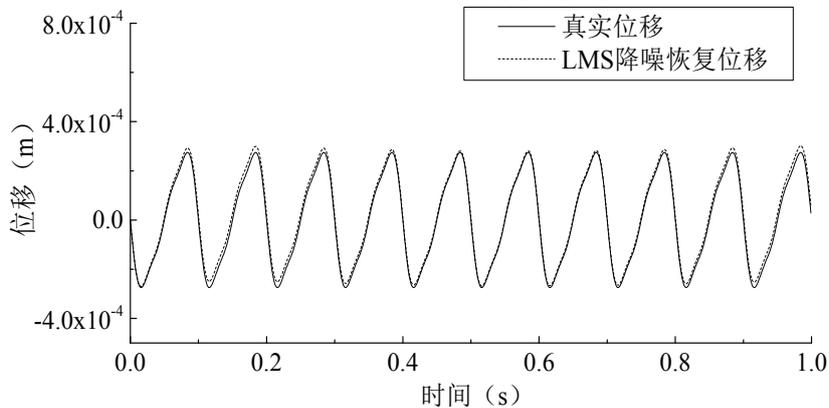


图 3.22 LMS 降噪后恢复的位移

表 3.2 信号 2 位移频域积分误差对比

小波降噪积分		LMS 降噪积分	
$E_{r1}(\%)$	$E_{r2}(\%)$	$E_{r1}(\%)$	$E_{r2}(\%)$
7.88	1.65	3.96	0.87

针对小波阈值降噪和 LMS 方法降噪后的信号,运用频域积分的数值算法进行二次积分得到位移信号,由加速度信号  $a(t) = \sin(20\pi t) + \sin(40\pi t) + \sin(60\pi t)$  得到理论的位移信号为:  $y(t) = -\frac{1}{(20\pi)^2} \sin(20\pi t) - \frac{1}{(40\pi)^2} \sin(40\pi t) - \frac{1}{(60\pi)^2} \sin(60\pi t)$ , 两种算法还原的位移信号与实际位移的对比如图 3.21、图 3.22 所示。两组加速度信号降噪积分的结果基本相同,峰值误差大小分别为 7.88%和 3.96%,从位移还原的结果可以发现,降噪后的信号通过积分能还原位移信号的峰值以及大致趋势,其中 LMS 在均方误差收敛之前的信号中仍然包含有少量的高频分量,这部分噪声在二次积分中并未对结果产生大的影响,而小波阈值降噪的加速度信号中残留的低频噪声在二次积分中放大,形成了非直线的误差,最小二乘法去除趋势项的过程中对该部分误差的拟合失效,造成在 0.4s 附近位移的峰值发生了明显的偏大,而在 0.6s 时刻的最小位移偏小,相对误差值相对 LMS 降噪后积分的误差值偏大,这部分误差主要来源于低频噪声的干扰。

### 3.6 本章小结

本章主要阐述了移动荷载作用下梁结构动挠度的识别,将挠度分解成静荷载作用引起的挠度和振动引起的挠度,分别通过应变-挠度的关系以及加速度积分的方式对这两部分进行识别,最后再通过信号重构得到测点的实际位移。其中振动位移部分涉及到复杂的信号处理及数值运算,通过研究信号的积分算法和信号的降噪处理方法,利用 MATLAB 进行数值的仿真算例,验证了 LMS 算法对振动信号进行降噪的可行性,并对降噪后的信号进行了二次频域积分,达到了恢复位移信号的目的,通过计算可以得到以下结论:

1、时域积分和频域积分都是有效的数值积分算法,对于需要多次去趋势项进行积分的信号,采用频域积分有较高的精度,主要表现在趋势项控制在可以接受的范围,且经过多次积分后信号幅值并未有太大衰减。

2、LMS 算法计算结果的好坏与收敛因子大小有很大关系,步长的大小直接影响到收敛速度与稳态误差,步长越长,收敛速度越快,但这样很可能导致不能收敛到全局最优点,使得稳态误差很大,因此可以进一步研究变步长的自适应算法来进行进一步的优化。

## 第4章 移动荷载识别的数值模拟算例

基于动力响应数据识别桥梁上部移动荷载的关键点是需要有可靠的信号，以及优化的求解算法，本节的主要内容是利用ANSYS有限元软件<sup>[75]</sup>强大的瞬态分析功能模拟移动荷载作用在桥梁上的过程，为减小问题的复杂程度和提高识别精度，主要采用了二维的多轴移动荷载作为识别对象，根据瞬态分析下各测点的动力响应结果与不同的噪声水平进行混合，再通过对信号进行优化处理作为移动荷载识别的输入部分。

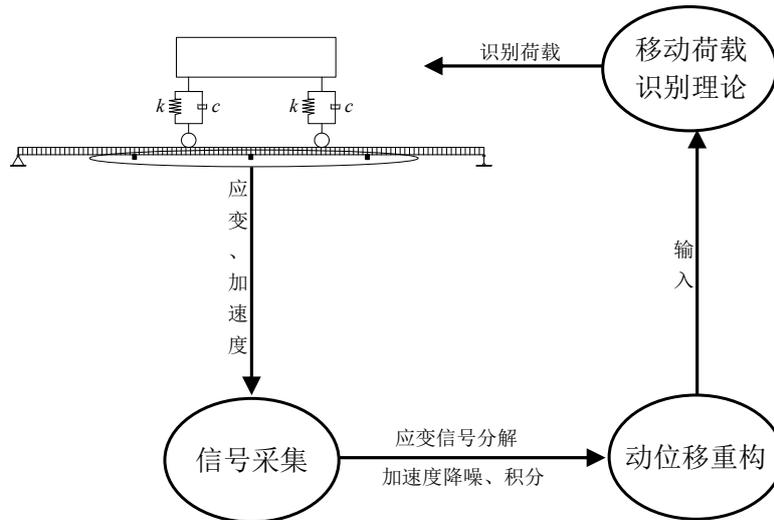


图4.1 利用动位移进行荷载识别流程图

ANSYS 有限元软件中提供了三种瞬态分析的方法，分别为完全求解方法、缩减求解方法和模态叠加方法。完全求解方法容易使用、运算量大，适用于各种类型的线性、非线性问题；缩减求解法比完全求解法运算速度快，但不能施加单元荷载；模态叠加法运算速度最快，但运算过程中的时间步长必须保持不变且仅能考虑部分非线性因素。考虑到建立的梁格模型节点和单元较少且结构在加载过程处于线性弹性阶段，故综合选取完全求解方法来对车辆移动荷载进行瞬态分析。

本章采用了一座简支梁桥的算例，利用ANSYS进行建模，梁单元使用BEAM3，每个单元节点具有三个自由度，桥梁的参数如下 $EI=2.87 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2$ ， $\rho=2303 \text{kg/m}$ ，梁长 $L=25 \text{m}$ ，桥梁的前三阶固有频率为 $f_1=4.79 \text{Hz}$ ， $f_2=19.18 \text{Hz}$ ， $f_3=43.15 \text{Hz}$ ，采样频率取 $200 \text{Hz}$ 。全桥结构划分为100个单元，包括101个节点。设桥面移动荷载为双轴的时变荷载： $f_1(t) = -28.75(1 + 0.25\sin(2\pi t))$ ， $f_2(t) = -57.5(1 + 0.25\sin(2\pi t))$ ，弹簧刚度： $k=1595 \times 10^3 \text{N/m}$ ，阻尼： $334200 \text{kg/s}$ 。

## 4.1 不同参数对桥梁动力响应的影响

### 4.1.1 车速对桥梁的影响

移动荷载是桥梁运营期间承受的主要荷载,是影响桥梁使用寿命的重要因素。在车辆荷载作用下,桥梁不仅要承受车辆的静荷载还会受到惯性力的作用而发生振动,桥梁结构将产生比相同静荷载作用下更大的变形和内力。下图 4.2 比较了 1/4、1/2、3/4 跨三个位置在不同荷载移动速度作用下(10m/s、20m/s、30m/s、40m/s、50m/s)的竖向位移变化。

从图中分析可以得出,桥梁最大挠度一般在车辆行驶至测点位置附近时产生,车辆行驶速度对桥梁的动位移响应具有较大的影响,当行车的速度越低,动挠度的波动情况越显著,此时的最大挠度值较小。车速越快动位移越大,同时位移曲线的波动也越光滑,在较短的时间内结构测点就已达到位移最大值,当车辆以高速驶出桥梁后结构的自由振动振幅较低速时更大。最大响应值会随着车辆运行速度的增加而增大或者减小,但并不与车速呈现单调的关系,而是存在一个临界速度,在这个速度的作用下,桥梁的响应会达到最大值。当车辆以较慢的速度行驶经过桥梁的上部时,荷载与桥梁的接触时间较长,由于结构自身阻尼的存在,可以缓冲车辆带来的动力作用,这种情况与静态相类似;当车辆以较快的速度通过桥时,短时间的相互作用未能充分激起桥梁的响应。

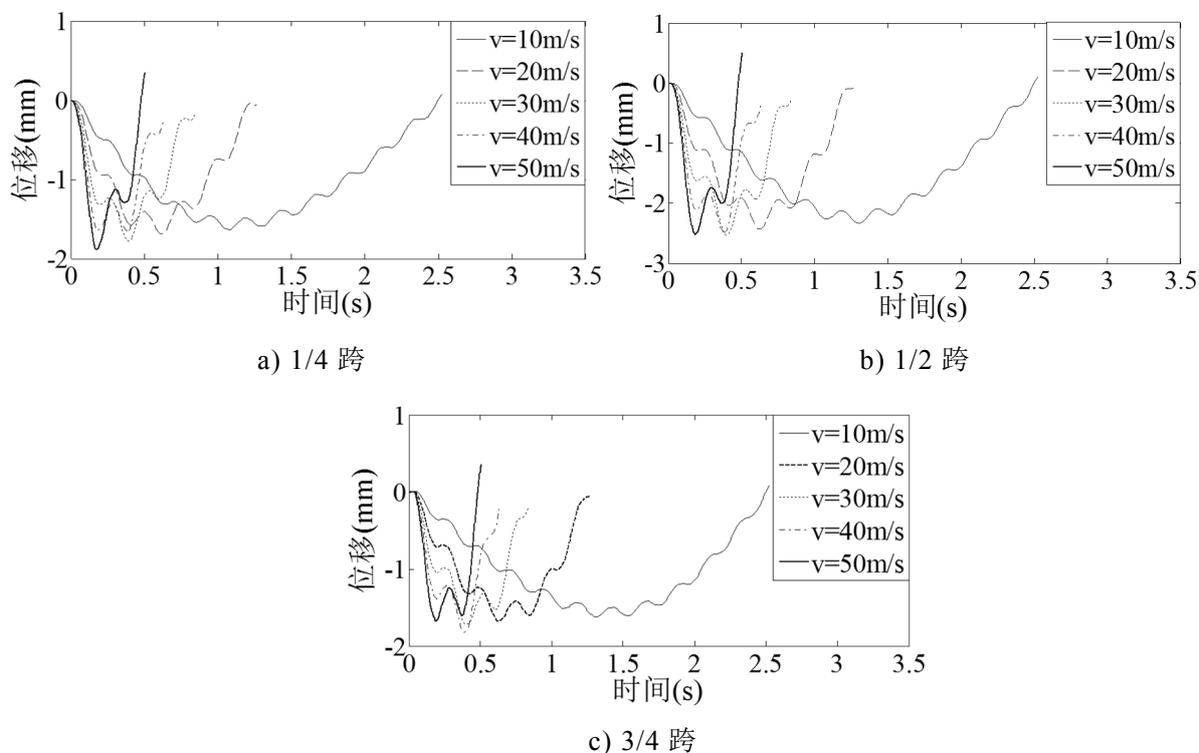


图4.2 不同车速作用下桥梁动位移

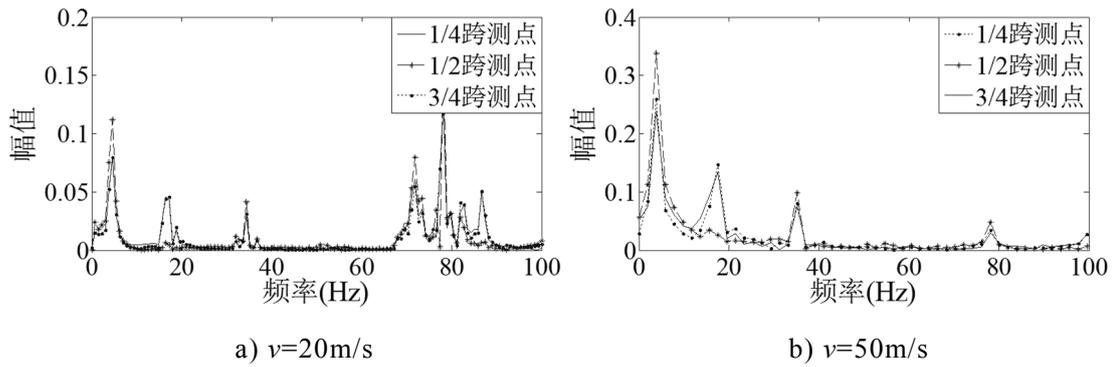


图4.3 不同车速作用下加速度信号的幅频特性

冲击系数可以反映在动力荷载作用下桥梁响应的大小，动荷载作用下的挠度与相应静荷载作用下挠度的比值称为冲击系数。影响冲击系数的因素有很多，具体的可包括：车辆行驶速度、桥梁结构型式、桥面平整度等。桥梁的挠度可以直观地反映结构的整体变形，可作为衡量刚度的指标。在实测冲击系数的过程中，记录测点在不同的荷载移动速度条件下的挠度曲线，再根据挠度的时程曲线推定冲击系数。

冲击系数的定义可表示为：

$$1 + \mu = \frac{Y_{dmax}}{Y_{smax}} \quad (4.1)$$

其中  $Y_{dmax}$  表示最大动挠度值， $Y_{smax}$  表示最大静挠度值。

忽略桥面不平整度对车辆行驶的影响，静载时得到桥梁的最大竖向位移为-2.252mm，计算得到不同车速下的冲击系数大小如下表 4.1 所示，变化趋势如图 4.4 所示。

表 4.1 不同车速状态下的冲击系数

速度(m/s)	最大挠度(mm)	冲击系数(1+μ)
10	-2.336	1.037
20	-2.438	1.083
30	-2.534	1.125
40	-2.490	1.106
50	-2.517	1.118

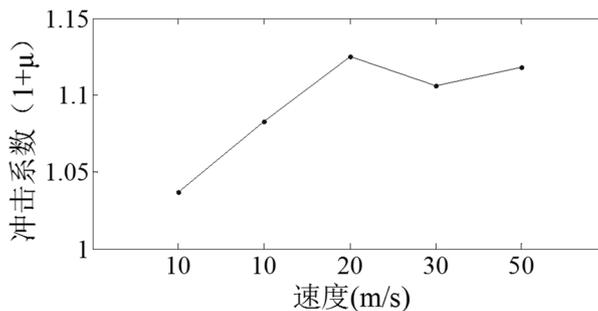


图4.4 不同车速作用下冲击系数的变化趋势

从图 4.4 中可以看到，不同车速对动力系数变化的影响较大，当路面条件一定的情况下，冲击系数并非随着速度的增加而一直增长，而是当速度达到某个值的时候会出现峰值，这是由于车辆以这个速度通过桥梁结构时发生了第二类竖向共振<sup>[76]</sup>。

### 4.1.2 车辆悬挂刚度对桥梁动力响应的影响

在桥梁实际运营的过程当中，上部结构会受到各种类型的车辆荷载作用，每一类型的车辆具有不同的悬挂和阻尼系统，其作用在结构上所产生的作用效应存在差异，通过改变模拟车辆悬挂系统的刚度可以看到移动速度为 20m/s 和 50m/s 时跨中测点位置的动位移结果，如图 4.5 所示。

从图中的结果可以看出，当车辆以不同的速度通过桥梁时，汽车悬挂的刚度越大，产生的动位移越大，当刚度值达到一定程度时影响较小，动位移最大值较稳定，当车速较快的时候，刚度的变化所引起的动位移变化比低速时的变化值更大，从加速度的幅频特性可以看出，不同的悬挂刚度对加速度信号的幅值影响较大，当车速较低且悬挂刚度较小时，车辆和桥梁的耦合使得高频振动激发的更加充分，振动越剧烈。

通过调整车辆模型和桥梁的各个参数进行分析可以看出，桥梁跨中的动位移随着车速和车辆悬挂刚度的改变会发生显著的变化，车速越快，车辆作用于桥梁所产生的动挠度就越大，较低的车速能激发桥梁高频振动，车速较高的情况下以低频振动为主，冲击系数也会随着车速呈现总体增大的趋势。

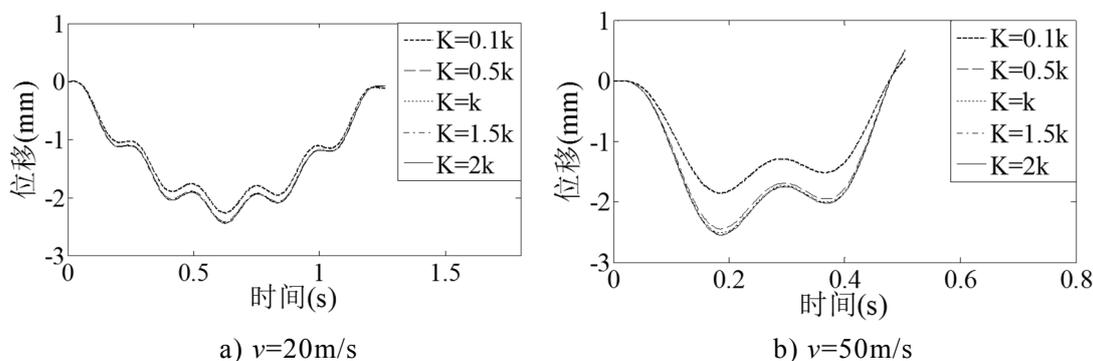


图4.5 悬挂刚度变化对动位移的影响

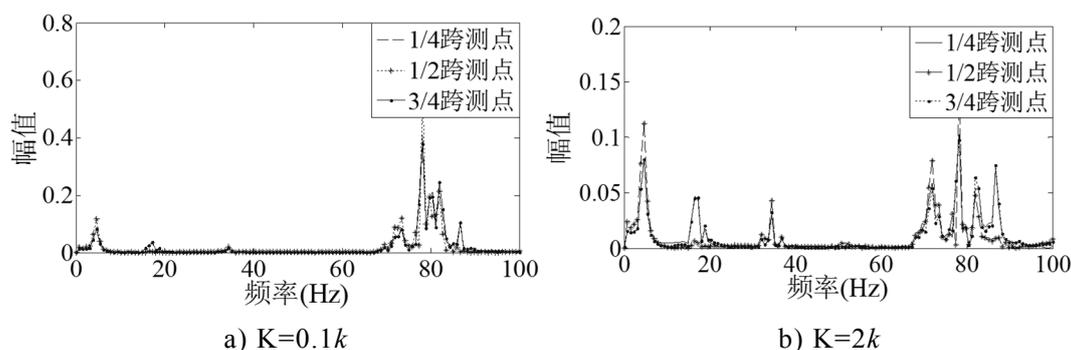


图4.6 不同悬挂刚度情况下加速度信号的幅频特性

### 4.1.3 各阶模态对桥梁动力响应的影响

对于简支梁桥，影响其主要动力特性的是前几阶模态，本文在荷载识别过程中用到了简支梁前三阶的振型函数求解模态坐标，图4.7为 $v=20\text{m/s}$ 时，在式(2.5)中运用三阶模态振型函数求解得到的位移模态坐标，从求解结果可以看出，模态坐标的大小主要是由一阶决定，随着模态数的增加，模态坐标不断减小，其对测点位移响应的贡献就越小，因此采用三阶模态进行移动荷载的识别能够满足精度的要求。

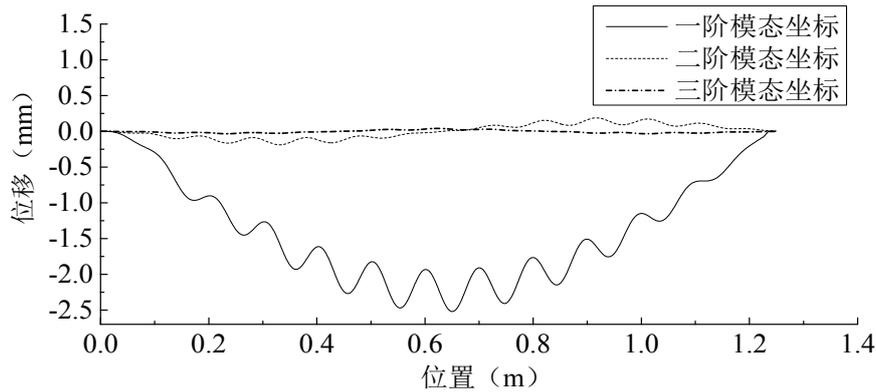


图4.7  $v=20\text{m/s}$ 模态坐标

## 4.2 移动荷载识别的算例分析

对于各个荷载识别工况，沿桥纵向 1/4、1/2、3/4 跨的位置共布设三个测点，如图 4.8 所示，通过测点获取加速度和弯矩响应来进行移动荷载的识别，计算只采用简支梁的前三阶模态，信号的采样频率为 200Hz，荷载的移动速度为 10m/s、20m/s、30m/s。

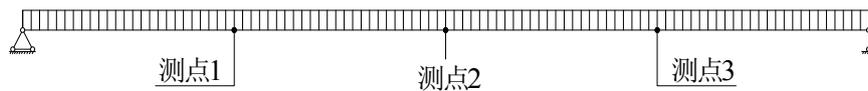


图 4.8 桥梁模型测点布置

### 4.2.1 荷载识别误差

在实际应用和试验过程中，移动荷载的大小无法通过直接测量得到，真实的移动荷载是未知的，TDM 方法是已经被认可的能够较好识别移动荷载的方法，为了对识别结果进行评价，首先利用有限元软件输出测点的真实信号，再对比真实信号和重构信号识别结果进行误差评价：

$$f_{err} = \frac{\sum |f_{ture} - f_{reconstruction}|}{\sum |f_{ture}|} \times 100\% \quad (4.2)$$

其中  $f_{ture}$  和  $f_{reconstruction}$  分别表示真实信号和重构信号的荷载识别结果。