

纤维增强悬臂薄板固有特性分析 (中文题目黑体三号, 不超过 22 个字)

李 晖, 吴怀帅, 薛鹏程, 闻邦椿 (作者不得超过 4 人, 宋体小四)

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110004) (作者单位宋体小五)

摘要: 采用理论与实际相结合的方式, 对悬臂状态下纤维增强复合薄板的固有特性进行了分析与验证。首先, 基于双向梁函数法, 推导了具任意纤维角度下该类型复合薄板的最大动能和应变能, 明确了利用该方法获取固有频率和模态振型的理论原理。然后, 编写了 Matlab 计算程序, 并给出了分析纤维增强悬臂薄板固有特性的具体流程。最后, 搭建了固有特性测试系统, 并以 TC500 碳纤维/树脂复合薄板为研究对象, 进行了实际测试。验证结果表明, 基于双向梁函数法的纤维增强复合薄板固有频率计算结果, 与实验结果的误差在 3.7%~9.7% 之内, 且前 5 阶振型结果也与测试振型结果一致, 进而验证了所提出的理论分析方法的正确性。(中文摘要 200 字以内, 宋体小五, 单倍行距)

关键词: 纤维增强; 悬臂薄板; 固有特性; 双向梁函数法; 分析验证 (关键词 5~8 个, 宋体小五)

中图分类号: TB535 **文献标识码:** A

Analysis and verification of natural characteristics of fiber-reinforced thin cantilever plate based on Two-dimension Beam Function method (英文题目新罗马 (Times New Roman) 加粗小四)

Li Hui, Wu Huai-Shuai, Xue Peng-cheng, Wen Bang-chun (作者英文名字斜体, 新罗马小四)

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China) (新罗马小五)

Abstract: This research combines theory with experiment to analyze and verify natural characteristics of fiber reinforced composite thin plate under cantilever boundary condition. Firstly, based on two-dimension beam function method, the largest kinetic energy and strain energy of such composite plate with arbitrary fiber angle have been deduced, and the corresponding theoretical principles to analyze natural frequencies and modal shapes have been clarified. Then, the Matlab calculating program has been written, and the specific analysis procedures of natural characteristics of fiber-reinforced thin cantilever plate are also proposed. Finally, T500 fiber/epoxy composite plate is taken as a study object, and its frequency and shape results are measured based on the established the test system of natural characteristics of such composite plate. It is found by comparison that the resulting frequencies calculated based on two-dimension beam function method can have a good agreement with the experimental results, and the related errors are within the range of 3.7%~9.7%. Besides, the first 5 modal shapes are also consistent with the measured shape results, thus the effectiveness of above method has been verified. (英文摘要新罗马小五, 单倍行距)

Keywords: fiber-reinforced; thin cantilever plate; natural characteristics; two-dimension beam function method; analysis and verification (英文关键词 4-5 个, 新罗马字体小五)

0 引言 (一级标题黑体小四)

纤维增强复合材料比强度高、比模量高、热稳定性好, 还有一定的阻尼减振能力。目前, 以 TC500、TC800 等为代表的先进碳纤维/树脂基复合材料正在被越来越多地应用于航空、航天、汽车工业、船舶、体育器械与兵器工业等重要领域^[1-4], 工程实际中也存在大量通过该类型材料制成的典型复合薄板结构件, 它们通常处于悬臂约束的边界条件下, 如太阳能帆板、航空发动机风扇叶片以及大型风力机叶片等, 随着它们的结构越来越复杂、工作环境越来越苛刻, 其振动问题也越来越突出, 由此引发的振动超标、磨损、疲劳失效等故障问题也越来越突出^[5-9], 因此, 研究纤维增强悬臂薄板 (FTCP, fiber-reinforced thin cantilever plate) 的相关振动问题有着重要的工程及学术意义^[10]。

(全文版面控制在 4-8 页, 以下正文部分, 中

文文字为宋体五号, 数字英文为新罗马五号, 对其网格, 并勾选如果定义了文档网格, 则自动调整右缩进; 如果定义了文档网格, 则对齐到网格, 如下图所示)



图1 文档设置

Fig.1 Setting documents

结构系统的固有特性通常包括固有频率和模态振型, 它们是深入研究结构系统振动特性的基础, 其对于动态设计、理论分析、故障诊断都有着重要的指导作用^[11-12]。长期以来, 国内外学者在研究纤维增强复合材料薄板的固有特性方面做了很多的工作, 已经取得了阶段性的研究成果。例如, Mohan 和 Kingsbury^[13]

基金项目: 国家自然科学基金(51505070), 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N150304011, N160313002), 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室研究基金资助项目 (VCAME201603)。(列出基金项目)
通讯作者: 李 晖, 男, 博士, 博士后。邮箱: lh200@163.com。(列出通讯作者信息及邮箱)

推导了多种边界条件下碳纤维/树脂复合薄板结构的动力学方程，通过 Galerkin 法求解相应的特征方程，并获取了固有频率与振型向量。研究发现其固有频率和振型结果在很大程度上受到弹性主轴方向的影响，对于正交各向异性复合薄板的固有特性分析，采用传统的各向同性分析方法无法对其进行准确预测。Nair 和 Durvasula^[14]对复合材料薄板的固有特性也进行了研究，他们在 Ritz 法中用梁特征函数表示振型，求出了除悬臂条件以外的不同边界条件下薄板的固有频率近似解，并研究了纤维方向对模态振型的影响，但并未通过实验验证理论分析结论。Sivakumaran^[15]也使用 Ritz 法获得了 T300 碳纤维增强复合薄板在自由边界条件下的固有频率和模态振型，并将复合结构系统面内位移和面外位移函数表示成幂级数的形式，还与有限元结果和实验结果进行对比，该计算结果与有限元仿真结果以及实验结果相吻合。Leissa 和 Narita^[16]基于经典层合板理论，采用 Ritz 法获得了不同铺层和不同纤维铺设角度下，玻璃纤维、碳纤维和石墨纤维增强复合薄板在简支边界条件下的固有频率和振型，并讨论了材料、铺层数和纤维角度对固有特性的影响。Qatu^[17]在 Ritz 法中采用代数多项式法求解了不同边界条件下玻璃/树脂和石墨/树脂复合薄板的固有频率和模态振型，并研究了固有频率的变化与铺设角度的关系，但并未与实验测试结果进行对比。杨和振^[18]利用锤击和激振器法，在不同温度条件下，对悬臂状态下复合薄板的振动特性进行测试，并采用随机子空间法识别方法获得了固有频率、阻尼以及振型，进而分析了环境条件变化对上述参数的影响。漆文凯等^[19]对自由和悬臂两种边界条件下的无损伤和有开孔损伤的 T300/BMP316 复合薄板开展了试验研究，获得相应的固有频率和振型，并分析了开孔位置、开孔大小等损伤参数对其固有特性的影响规律，但并未从理论上给出解释。史冬岩等^[20]基于改进傅里叶级数方法(IFSM)对石墨/环氧树脂复合薄板结构的固有特性进行了研究，并采用 Rayleigh-Ritz 法求解其固有频率，但并未获得悬臂状态下的计算结果。

(若干正文问题补充说明：

- 1 矩阵符号用大写黑斜体字，向量符号用黑斜体字；矩阵转秩符号“T”用白正体字。
- 2 物理量、变量、常数、函数符号、普通集符号用白斜体字。自然数集、实数集、复数集和有理数集分别用黑正体字符 N , R , C 和 Q 表示。单位符号用白正体字。
- 3 自然对数的底 e ，圆周率 π 和虚数单位 i (或 j) 均用白正体字。
- 4 下标如果是变动的量或表示坐标方向，用白斜体。如 X_i , $i=1,2,3$ ，这里， i 是变动的量；或 F_x ；这里， x 表示坐标。下标如果是表示某种特定含

义的单词的字头，则用白正体。

5 微分符号“d”用白正体字。)

虽然人们已经对纤维增强复合薄板的固有特性进行了深入研究，但上述研究工作绝大部分针对理想的边界条件，在悬臂状态下通过理论结合实际的方法对其固有特性进行研究的较少。且绝大多数文献得出的频率结果多为无量纲频率值，其并未得到实验数据验证。为此，有必要继续研究悬臂边界下该类型复合材料结构的固有特性问题。

本文采用理论与实际相结合的方式，对悬臂状态下纤维增强复合薄板的固有特性进行了分析与验证。首先，基于双向梁函数法，推导了具任意纤维角度下该类型复合薄板的最大动能和应变能，明确了利用该方法获取固有频率和模态振型的理论原理。然后，编写了 Matlab 计算程序，并给出了分析纤维增强悬臂薄板固有特性的具体流程。最后，搭建了固有特性测试系统，并以 TC500 碳纤维/树脂复合薄板为研究对象，进行了实际测试。验证结果表明，基于双向梁函数法的纤维增强复合薄板固有频率计算结果，与实验结果的误差在 3.7%~9.7% 之内，且前 5 阶振型结果也与测试振型结果一致，进而验证了所提出的理论分析方法的正确性。

1 基于双向梁函数法的纤维增强悬臂薄板固有特性分析 (一级标题黑体小四)

1.1 理论建模 (二级标题黑体五号)

所研究的纤维增强悬臂薄板是由 n 层具有正交各向异性特点的纤维和基体材料组合而成的，如图 1 所示。首先，将其中面作为参考平面，并建立 xoy 坐标系。纤维方向与整体坐标系 x 轴方向的夹角为 θ ，板长为 a ，板宽为 b ，板厚为 h ，每一层位于 z 坐标轴较低表面 h_{k-1} 和较高表面 h_k 之间，每层的厚度均相同。图中的 1 代表纤维纵向，2 代表纤维横向，3 代表垂直于 1-2 平面的方向。假设纤维增强悬臂薄板平行纤维方向的弹性模量为 E_1 ，垂直纤维方向的弹性模量为 E_2 ，1-2 平面内的剪切弹性模量为 G_{12} ，1 方向作用应力引起 1、2 方向应变的泊松比为 ν_{21} ，2 方向作用应力引起 1、2 方向应变的泊松比为 ν_{12} 。

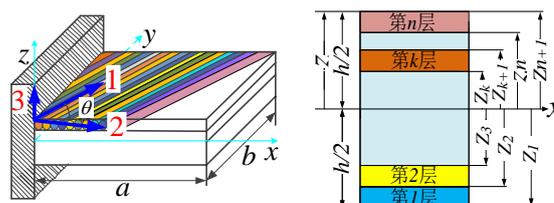


图1 纤维增强悬臂薄板的理论模型 (图和表宋体小五)

Fig.1 Theoretical model of FTCP (图和表英译新罗马小五)

- (1 图和表必须附有图题和表题，并要求有英译；
- 2 图的纵横坐标线必须等分，必须标注单位符号，量符号与单

位符号之间用“()”隔开;

3 图中文字中文为宋体小五, 数字英文为新罗马小五)

由于纤维增强复合薄板多为对称层合结构, 其拉伸与弯曲之间不存在耦合关系, 因此面内位移和面外位移是解耦的, 根据经典层合板理论, 将位移场写为如下形式

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

(1.公式部分居中, 字号与正文五号字大小接近;

2.公式编号需靠右对齐)

式中, u, v, w 代表板内任意一点的位移; u_0, v_0, w_0 代表板中面位移; h 为复合薄板的厚度; t 表示时间。

由于本文分析的是对称层合板, 面内振动和横向振动不存在耦合, 因此我们只需考虑薄板的横向振动, 即忽略中面位移 u_0 和 v_0 。根据经典层合板理论的假设可知, 正应变 ε_z 和剪应变 γ_{yz} 、 γ_{xz} 都为0, 即 $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$, 由应变和位移的关系, 板内任意一点的应变可以表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

对于正交各向异性材料, 材料主轴方向的应力-应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式中,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12}, & \nu_{21} &= \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \end{aligned} \quad (4)$$

当材料主轴方向与整体坐标系之间有一定夹角 θ 时, 用应力-应变转轴公式计算得到第 k 层板在整体坐标系下的应力-应变关系如下

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k \\ &\quad + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k) \end{aligned} \quad (6)$$

式中, k 表示复合薄板的第 k 层, θ_k 表示第 k 层板的纤维方向与整体坐标系 x 轴的夹角。

薄板弯曲振动的动能和应变能可以分别用公式(7)和(8)表示

$$E = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dAdz \quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dAdz \quad (8)$$

同时, 将上面得出的位移公式(1), 应变公式(2)以及应力公式(5)代入动能公式(7)和应变能公式(8)中, 可以得到用中面位移 w_0 表示的复合薄板的动能和应变能

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 dAdz \\ U &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left\{ \bar{Q}_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2\bar{Q}_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right. \\ &\quad + 4\bar{Q}_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \\ &\quad \left. + 4\bar{Q}_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4\bar{Q}_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dAdz \end{aligned} \quad (9)$$

1.2 基于双向梁函数法的固有特性求解

由于双向梁函数法可以较为精确的表示复合薄板的挠度振型, 而且在选取有限项数的情况下即可达到足够的精度。因此, 采用双向梁函数法来分析获取其固有频率和模态振型, 首先将中面位移表示成如下形式

$$w_0(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \quad (11)$$

式中, $W(x, y)$ 为振型函数。

基于双向梁函数法, 可将复合薄板的挠度振型函数假设为

$$W_{mn}(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (12)$$

式中, m, n 分别表示振型沿 x, y 方向的半波数, a_{mn} 为待定系数。 M, N 分别为 m, n 所取得的最大值。

针对图1所建立的纤维增强悬臂薄板的理论模型, 沿 x 方向可以用固定-自由梁函数 $X_m(x)$ 来表示其第 m 阶振型函数, $X_m(x)$ 的具体表达式为

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \cosh \left(\frac{\lambda_m x}{a} \right) - \cos \left(\frac{\lambda_m x}{a} \right) \\ &\quad - \sigma_m \left(\sinh \left(\frac{\lambda_m x}{a} \right) - \sin \left(\frac{\lambda_m x}{a} \right) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

式中,

$$\lambda_1 = 1.875, \lambda_2 = 4.694,$$

$$\lambda_3 = 7.854, \lambda_m = \frac{2m-1}{2} \pi (m \geq 4)$$

$$\sigma_1 = 0.7341, \sigma_2 = 1.0185, \sigma_3 = 0.9992,$$

$$\sigma_m = \frac{\cosh(\lambda_m) + \cos(\lambda_m)}{\sinh(\lambda_m) + \sin(\lambda_m)} (m \geq 4)$$

类似地, 沿y方向可以用自由-自由梁函数 $Y_n(y)$ 来表示其第 n 阶振型函数, $Y_n(y)$ 的具体表达式为

$$\begin{aligned} Y_1(y) &= 1, Y_2(y) = 1 - 2y/b, \\ Y_n(y) &= \cosh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) \\ &\quad - \sigma_n \left(\sinh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) + \sin\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) \right) (n > 2) \end{aligned} \quad (14)$$

式中,

$$\lambda_3 = 4.730, \lambda_n = \frac{2n-3}{2} \pi (n \geq 4)$$

$$\sigma_3 = 0.9825, \sigma_n = \frac{\cosh(\lambda_n) - \cos(\lambda_n)}{\sinh(\lambda_n) - \sin(\lambda_n)} (n \geq 4)$$

将公式(11)代入方程(9)和(10)中, 得到用待定参数 c_{mn} 表示的应变能和动能表达式, 忽略谐波分量的影响, 可以得到最大应变能 U^{\max} 和最大动能 E^{\max} 的表达式

$$E^{\max} = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} X_m Y_n \right)^2 dAdz \quad (15)$$

$$\begin{aligned} U^{\max} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left\{ \bar{Q}_{11} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \frac{d^2 X_m Y_n}{dx^2} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2\bar{Q}_{12} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \frac{d^2 X_m Y_n}{dx^2} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} X_m \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \\ &\quad + 4\bar{Q}_{16} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \frac{d^2 X_m Y_n}{dx^2} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_n}{dy} \right) \\ &\quad + 4\bar{Q}_{26} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} X_m \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_n}{dy} \right) \\ &\quad \left. + \bar{Q}_{22} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} X_m \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right)^2 + 4\bar{Q}_{66} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_n}{dy} \right)^2 \right\} dAdz \end{aligned} \quad (16)$$

然后, 根据 Ritz 法, 将能量函数 L 表示成如下形式

$$L = E^{\max} - U^{\max} \quad (17)$$

求解纤维增强复合薄板的固有特性问题, 即是求解使 L 有最小值的所有待定参数, 即有下式

$$\frac{\partial L}{\partial a_{mn}} = 0, \quad m=1, 2, \dots, M, \quad n=1, 2, \dots, N \quad (18)$$

将公式(17)代入最小化条件(18)中, 我们可以得到下列特征值问题

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = 0 \quad (19)$$

式中, \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别为结构系统的对称刚度矩阵和对称质量矩阵, 特征向量 $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn})^T$ 。

此时, \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 中的元素是所有待定参数 a_{mn} 的系

数。为保证方程(19)有解, 需要系数矩阵的行列式为0, 即

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (20)$$

这样就可以通过双向梁函数法, 分析获取纤维增强悬臂薄板在任意纤维角度下的固有频率。在公式(11)中, 振型半波数 m 、 n 对应的 M 、 N 取值越大, 则固有频率计算结果就越精确, 通常取 $M=N=8$ 即可达到足够的精度^[21]。

最后, 将计算获得的某阶固有频率对应的特征向量以及所建立的薄板线框模型的各个节点坐标带回振型函数 $W(x, y)$ 中, 即可获得复合薄板结构的某阶模态振型。重复上述步骤, 就可依次获得所关注的全部振型。

2 纤维增强悬臂薄板固有特性分析流程

本文第1部分明确了基于双向梁函数法分析获取纤维增强悬臂薄板固有频率和模态振型的理论原理, 本节利用 Matlab 软件, 编写了相应的计算程序, 并提出了分析获取纤维增强悬臂薄板固有特性的具有流程, 如图2所示, 可分为如下几个步骤:

(1) 输入复合薄板的几何参数和材料参数

首先, 需要给出纤维增强悬臂薄板的长度、宽度、厚度及每层纤维角度等几何参数, 然后, 输入纤维纵向和纤维横向的弹性模量、剪切模量、泊松比和密度等材料参数, 为后续动能和应变能的计算做好准备。

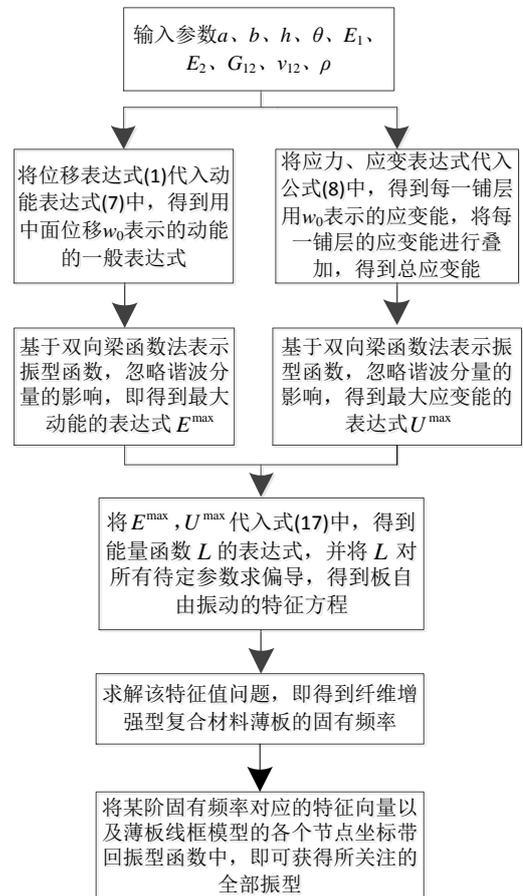


图2 纤维增强悬臂薄板固有特性的分析流程

Fig. 2 Theoretical analysis procedure of natural characteristics of FTCP

(5) 建立线框模型并求解模态振型

首先，根据纤维增强悬臂薄板结构尺寸，利用Matlab绘制出线框模型。然后将计算获得的某阶固有频率对应的特征向量带回到振型函数 $W(x,y)$ 中，得到该阶的模态振型函数。最后将绘制出的线框模型的各个节点坐标代入振型函数 $W(x,y)$ 中，即可获得薄板该阶的模态振型。重复上述步骤，则可依次获得各阶模态振型。

3 实验验证

由于TC500碳纤维/树脂复合材料在工程实际中比较常用，为了验证本文提出的理论分析方法的正确性，将该类型复合材料制作成长、宽、厚尺寸分别为 $260 \times 230 \times 2.36$ 的矩形薄板，并通过夹具对其一边进行夹紧，夹持长度为30mm，则最终在悬臂边界条件下测试时，该类型复合薄板的尺寸为 $230\text{mm} \times 230\text{mm} \times 2.36\text{mm}$ 。另外，该类型复合薄板为对称正交铺设，即 $[(0^\circ/90^\circ)_5/0^\circ/(90^\circ/0^\circ)_3]$ ，共有21层，每个铺层具有相同的厚度和纤维体积分数。纤维纵向弹性模量 $E_1=136\text{GPa}$ ，纤维横向弹性模量 $E_2=7.92\text{GPa}$ ，剪切模量 $G_{12}=3.39\text{GPa}$ ，泊松比 $\nu_{12}=0.32$ ，质量为251g，密度 $\rho=1780\text{kg/m}^3$ 。

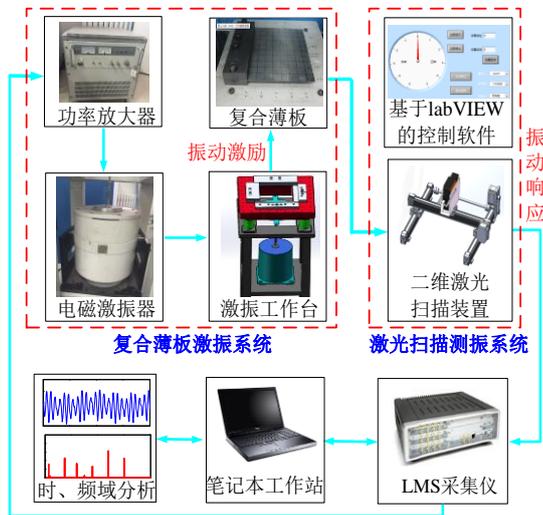


图3 纤维增强悬臂薄板固有特性测试系统

Fig 3 Test system of natural characteristics of FTCP

图3和图4分别给出了所搭建的纤维增强悬臂薄板固有特性测试系统图和现场测试图。主要由复合薄板激振系统、激光扫描测振系统以及LMS采集仪等组成，具体型号为：①LMS SCADAS 16通道便携式数据采集仪；②联能JZK-100激振器(最大正弦激振力1000N)和YE5878型功率放大器(额定输出功率1200w，输出电压40vrms)；③Polytec PDV-100激光测振仪(测试频率范围0-22KHz，最小速度分辨率 $0.05 \mu\text{m/s}$)；④自行设计开

发的激振工作台，其台面上安装有BK4508B加速度传感器(灵敏度为 10mv/m/s^2)；⑤基于labVIEW控制软件的二维激光扫描装置。

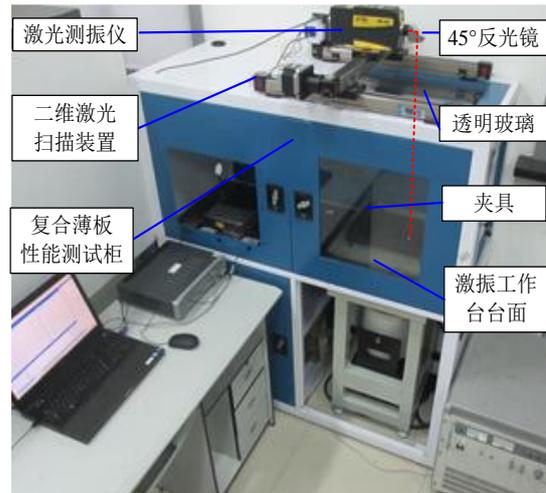


图4 纤维增强悬臂薄板固有特性测试现场

Fig 4 The real picture of natural characteristics measurement of FTCP

实验时，首先通过LMS采集仪发出正弦扫频激励信号，并通过激振系统对复合薄板进行振动激励，然后通过labVIEW控制软件，调整二维激光扫描装置中激光点的具体位置，并通过LMS采集仪对激光测振仪获得的响应信号进行实时采集。以测试前两阶固有频率为例，图5给出了通过扫频测试方法，在20Hz到100Hz扫描范围内获得的包含第1阶和第2阶固有频率的频域响应曲线，通过辨识其峰值，则可精确地获得固有频率结果，表1则还出了通过该方法获得的前5阶固有频率值。最后，在上述固有频率处，利用复合薄板激振系统激发其达到共振状态，并通过二维激光扫描装置来获得每一阶模态振型，振型测试结果也一并列入表1中。同时，为了便于比较，将通过Matlab计算程序获得的纤维增强悬臂薄板的固有频率和振型结果也列入表1中，并对其误差进行了详细分析。

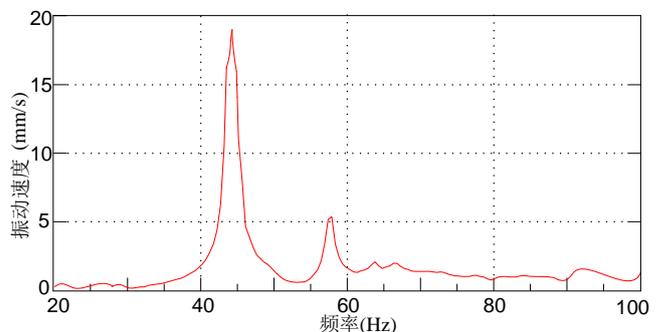


图5 通过扫频测试获得的包含第1、2阶固有频率的频域曲线

Fig 5 The frequency response curves containing the 1st and 2nd natural frequency obtained by frequency sweep test

表1 理论分析和实验测试获得的纤维增强悬臂薄板前5阶固有频率和模态振型(图和表宋体小五)

Table 1 The first 5 natural frequencies and modal shapes of FRCP obtained by theoretical analysis and experimental test(图和表英译新罗马小五, 表采用三线表形式, 表中文字中文为宋体小五, 数字英文为新罗马小五)

模态阶次	1	2	3	4	5
测试频率 A(Hz)	44.5	57.5	220.4	286.9	346.6
计算频率 B(Hz)	48.8	61.5	212.3	305.7	321.6
误差 (%)	9.7	7.0	3.7	6.6	7.2
$ B - A / A$					
测试 振形					
计算 振形					

通过与实验结果进行对比验证可知, 基于双向梁函数法的纤维增强悬臂薄板固有频率计算结果, 与实验结果的误差在3.7%~9.7%之间, 处于误差允许的范围, 且前5阶振型结果也与测试振型结果一致, 进而验证了理论分析方法的正确性, 利用本文所提出计算方法可以较好地实现悬臂边界下该类型复合薄板固有频率的分析与预测。

4 结论

本文采用理论与实际相结合的方式, 对纤维增强悬臂薄板的固有频率和模态振型进行了分析与验证, 具体工作包括:

(1) 基于双向梁函数法, 推导了任意纤维角度下该类型复合薄板的最大动能和应变能, 明确了利用该方法获取纤维增强悬臂薄板固有频率和模态振型的理论原理。

(2) 编写了Matlab计算程序, 并给出了分析纤维增强悬臂薄板固有特性的具体流程。主要包括输入复合薄板的几何参数和材料参数、基于双向梁函数法获得动能和最大动能、获得应变能和最大应变能、根据Ritz法求解固有频率、建立线框模型并求解模态振型等5个关键步骤。

(3) 搭建了纤维增强悬臂薄板固有特性测试系统, 并以TC500碳纤维/树脂复合薄板为研究对象进行了实际测试, 通过实验验证了该理论分析方法的正确性, 但需要说明的是, 本文并未在悬臂以外的边界下验证上述分析方法的正确性。

参考文献 (黑体小五, 居中对齐)

[1] The behavior of structures composed of composite materials[M]. Springer Science & Business Media, 2006.
 [2] 沈观林. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006. SHEN Guanlin. Mechanics of composite materials[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. (in Chinese)

[3] 王苻卫, 蔡慧莲, 王寿梅. 复合材料桨叶振动特性分析的一种新方法[J]. 航空学报, 1992, 13(9): 516-521. WANG X W, CAI H L, WANG S M. A new approach to analysing the vibration characteristics of composite blades[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1992, 13(9): 516-521.
 [4] 何连珠, 赵沛霖. 复合材料构件发射导弹的动响应分析[J]. 航空学报, 1992, 13(8): 448-451. HE L Z, ZHANG P L. Dynamic response analysis of composite structure during launching missile[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1992, 13(8): 448-451.
 [5] 杨强, 邵闯, 方可强. 航空发动机复合材料叶片振动疲劳特性研究[J]. 实验力学, 2014, 29(3): 361-367. YANG Q, SHAO C, ZHANG Z J. Vibration fatigue characteristics study of aircraft engine composite blade[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2014, 29(3): 361-367. (in Chinese)
 [6] Leyens C, Kocian F, Hausmann J, et al. Materials and design concepts for high performance compressor components[J]. Aerospace Science and Technology, 2003, 7(3): 201-210.
 [7] 顾志芬, 唐振廷. 碳纤维增强复合材料冲击断裂分析[J]. 北京航空航天大学学报, 1989, 4: 9-16. GU Z F, TANG Z T. Fracture analysis of carbon fiber reinforce composites under impact loading[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1989, 4: 9-16. (in Chinese)
 [8] GAO X, SONG Y, SUN Z. Numerical Simulation of Dynamic Response of Fiber Reinforced Ceramic Matrix Composite Beam with Matrix Cracks Using Multiscale Modeling[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2010, 23(5):537-548.
 [9] 孟维迎, 谢里阳, 刘建中, 等. 玻璃纤维增强铝锂合金层板单峰过载疲劳寿命性能对比研究[J]. 航空学报, 2015, xx(x): xxx-xxx. MENG W Y, XIE L Y, LIU J Z, et al. Contrast study on fatigue life performance of glass fiber reinforced Al-Li alloy laminates under unimodal overload[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, xx(x): xxx-xxx.
 [10] 梁春华, 李宏新, 凌瑶. 先进航空涡扇发动机风扇/压气机的先进结构与新材料[J]. 航空制造技术, 2007, 1: 60-63. LIANG C H, LI H X, LING Y. Advanced structure and new materials of Advanced aircraft turbofan engine fan/compressor[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2007, 1: 60-63. (in Chinese)
 [11] Ewins D J. Modal Testing: Theory and Practice[M]. Latchworth: Research Studies Press, 1984.
 [12] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989. CAO Zhiyuan. Theory of Plates and Shells Vibration[M]. Beijing: China Railway Press, 1989. (in Chinese)
 [13] Mohan D, Kingsbury H B. Free vibrations of generally

- orthotropic plates[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1971, 50(1):266-269.
- [14] Nair P S, Durvasula S. Vibration of generally orthotropic skew plates[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1974, 55(5):998-1002.
- [15] Sivakumaran K S. Natural frequencies of symmetrically laminated rectangular plates with free edges[J]. Composite Structures, 1987, 7(3):191-204.
- [16] Leissa A W, Narita Y. Vibration studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates[J]. Composite Structures, 1989, 12(89):113-132.
- [17] Qatu M S. Free vibration of laminated composite rectangular plates[J]. International Journal of Solids & Structures, 1991, 28(8):941-954.
- [18] 杨和振, Park Han-il, 李华军. 温度变化下复合材料层合板的试验模态分析[J]. 复合材料学报, 2008, 2(2):149-155.
YANG Hezhen, Park Han-il, LI Huajun. Experimental modal analysis of the composite laminates with temperature variation[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2008, 2(2):149-155. (in Chinese)
- [19] 漆文凯, 程博, 刘磊. 复合材料层合板的振动模态试验研究[J]. 航空发动机, 2013, 6(6):53-58.
QI Wenkai, CHENG Bo, LIU Lei. Research of vibration modal experiment for composite laminates[J]. Aero engine, 2013, 6(6):53-58. (in Chinese)
- [20] 史冬岩, 王青山, 石先杰, 等. 任意边界条件下正交各向异性薄板自由振动特性分析[J]. 上海交通大学学报, 2014, 48(3):434-438.
SHI Dongyan, WANG Qingshan, SHI Xianjie, et al. Free vibration analysis of orthotropic thin plates in general boundary conditions[J]. Journal of Shanghai Jiao tong University, 2014, 48(3):434-438. (in Chinese)

(参考文献要求文字中文为宋体小五, 数字英文为新罗马小五, 具体说明要求如下:

1 参考文献要求9篇以上近期文章

2 作者不超过3人时, 必须注明所有作者; 作者超过3人时, 必须注明3位作者, 其余用“等”; 不允许只注明1位或2位作者, 其余用“等”。外文作者“姓前名后, 名缩写, 不加缩写点”。

3 期刊文章必须注明期刊的 年、卷、期和文章起止页码; 期刊名缩写时不加缩写点。

4 中文参考文献要有相应的英译。

5 参考文献著录示例(请注意单词的大小写和正斜体的规则以及中文作者姓名的英译)

(1) 期刊: [序号]作者.文献标题[J].刊名, 年, 卷(期): 起止页码.

[1] 胡桥, 何正嘉, 张周锁, 等. 经验模式分解模糊特征提取的支持向量机混合诊断模型[J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(3), 290-294.

Hu Qiao, He Zheng-jia, Zhang Zhou-suo, et al. Hybrid diagnosis model of support vector machine based on fuzzy feature extraction with empirical mode decomposition[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(3): 290-294.

(2) 著作: [序号]作者.书名[M].出版城市: 出版社, 出版年: 起止页码.

[2] Vapnik V N. The nature of statistical learning theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995: 1-50.

(3) 论文集: [序号]论文作者.论文题名[C] // 论文集名. 出版地: 出版者, 出版年: 起止页码.

[3] Blaze M, Feigenbaum J, Ioannidis J, et al. The role of trust management in distributed systems security[C]// Secure Internet Programming: Issues for Mobile and Distributed Objects. Berlin: Springer-Verlag, 1999: 167-173.

(4) 学位论文: [序号]作者.论文名[D].保存地(城市名): 保存单位, 年份.

[4] 张志祥. 间断动力系统的随机扰动及其在守恒律方程中的应用[D]. 北京: 北京大学数学学院, 1998.

(英译略)

(5) 专利: [序号]专利所有者.专利名称: 专利国别, 专利号[P].公告日期或公开日期.

[5] 刘加林. 多功能一次性压舌板: 中国, 92214985.2[P]. 1993-04-14.

(英译略)

(6) 电子文献: [序号]主要责任者.题名[EB/OL]. 出版地: 出版者, 出版年[引用日期]. 获取和访问路径.)